Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 7, Abgabe: Montag, 29.11.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie den Fixpunktsatz von Banach und geben Sie für jede der vier Bedingungen (Banachraum, abgeschlossenes Gebiet, Selbstabbildung, Kontraktion) ein Beispiel für die Notwendigkeit an. Dabei seien jeweils die anderen drei Bedingungen erfüllt.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix} .$$

(1) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in D$ besitzt.

(2) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\overline{x} - x^k\|_\infty \le 0.01$ für den Fixpunkt $\overline{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

das Gesamtschritt-Verfahren $x_{k+1} = -D^{-1}(L + R)x_k + D^{-1}b$ und das Einzelschritt-Verfahren $x_{k+1} = -(D + L)^{-1}Rx_k + (D + L)^{-1}b$.

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Verfahren.

b) Führen Sie ausgehend von dem Startwert $x_0 = (0, 1, 1)^T$ jeweils zwei Iterationen des Gesamt- und des Einzelschritt-Verfahrens durch.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Seien $C_G = -D^{-1}(L + R)$ und $C_E = -(L + D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamtschritt-Verfahrens, bzw. des Einzelschritt-Verfahrens.
Zeigen Sie: Falls

$$\sum_{k \ne i} |a_{ik}| < |a_{ii}| \quad i = 1, .., n$$

gilt, so erhalten wir

$$\|C_E\|_\infty \le \|C_G\|_\infty < 1.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$, $y := C_E x$ zeige man induktiv $|y_k| \le \|C_G\|_\infty \, \|x\|_\infty$.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 29.11.2010, 12.00 Uhr)
Implementieren Sie in Matlab zwei Funktionen GesVerf und EinzVerf, welche die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des Gesamtschritt-Verfahrens, bzw. des Einzelschritt-Verfahrens bestimmt.
Den Funktionen soll eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und ein Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ übergeben werden.
Als Anwendung Ihres Programms betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind und u_i, $i = 1, \ldots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind.
Lösen Sie diese Randwertaufgabe mit Hilfe von GesVerf und EinzVerf, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = \sin(\pi x)$.
Ihr Programm sollte terminieren, wenn maximale Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als die vorgegebene Schranke $TOL = 10^{-3}$. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \ldots, u_n)$ und den maximalen Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$.
Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

(i) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.

(ii) Berechnung des Ergebnisses.

(iii) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

n	20	20	40	40
GSV / ESV	GSV	ESV	GSV	ESV