Dr.Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Marzena Franek

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 6, Abgabe: Montag, 22.11.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Aus einem Experiment ergeben sich die Wertepaare (t_i, y_i) für $i = 1, .., n$, $\sum_{i=1}^n t_i = 0$. Betrachten Sie den linearen Zusammenhang zwischen den Größen t_i und y_i, d.h. bestimmen Sie eine lineare Funktion $y = \alpha + \beta t$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Stellen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = (\alpha, \beta)^T$ auf. Zeigen Sie, dass sich bei der Lösung des linearen Ausgleichsproblems für α der Mittelwert der Messdaten und für β die Kovarianz von t_i, y_i durch die Varianz von t_i ergibt.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse A^+ gilt:

(1) $AA^+A = A$.

(2) $A^+AA^+ = A^+$.

(b) Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Pseudoinverse der folgenden Ausdrücke:

(1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A invertierbar.

(2) $A = uv^T$.

(3) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $A = (0)$.

(4) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $A = (1)$.

(5) $A = u$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a \sin\frac{2\pi t}{12} + b\cos\frac{2\pi t}{12}$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	*Stunden*
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	*m*

Bestimmen Sie h, a, b aus dem überbestimmten Gleichungssystem $H(t_i) = h_i,\ t_i = 0, 2, ..., 10$ mit Hilfe der Normalgleichungen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab und plotten Sie die Lösung und die Messwerte zusammen in einer Figure.
Hinweis: Mit den Befehlen `hold on` und `hold off` können mehrere Funktionen, Messwerte etc. in einer Figure geplottet werden. Unter dem Begriff `linespec` finden Sie in der Matlab-Hilfe einige Möglichkeiten, die Funktionen in einer Figure unterschiedlich zu gestalten.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\gamma > 0$. Bestimmen Sie die Lösung von

$$arg \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 + \gamma^2 \|x\|_2^2 .$$