

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

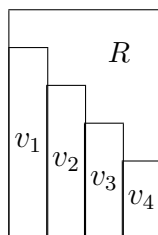
Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 15.11.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $R(A)$ der Bildraum, $N(A)$ der Kern von A .(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A^*)$.(b) Zeigen Sie, dass $N(A^*A) = N(A)$.**Aufgabe 2:** (4 Punkte)Die $n \times m$ -Matrix A liege in der QR -Zerlegung $A = QR$ vor. Geben Sie Formeln zur Berechnung von $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^T \\ A \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}^m$$

unter Benutzung der QR -Zerlegung von A an.**Aufgabe 3:** (4 Punkte)Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $x = x_0$ minimiert $\frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $Ax_0 = b$.**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: Montag, 15.11.2010, 12.00 Uhr)**

- (a) Schreiben Sie ein Programm zur QR -Zerlegung einer $(n \times m)$ -Matrix A ($n \geq m$). Dieses Programm soll eine $((n+1) \times m)$ -Matrix zurückgeben, deren oberer rechter Teil die Matrix R enthält. In den Spalten unterhalb von R befinden sich die Vektoren v_j zur Berechnung der Matrizen Q_j , z.B.:



- (b) Sei b ein Vektor der Länge n , $A = QR$ die QR -Zerlegung einer $n \times m$ Matrix A . Schreiben Sie ein weiteres Programm zur Berechnung von $Q^T b$.
- (c) Testen Sie Ihr Programm an der $n \times m$ -Matrix A , mit $A_{i,k} = \frac{1}{i+k-1}$ für $n = 100, 200$, $m = 50, 100$. Wählen Sie $b \in \mathbb{R}^n$, $b_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{i+k-1}$, $i = 1, \dots, n$. Berechnen Sie mit (a), (b) eine kleinste Quadrate Lösung von $Ax = b$.