

## Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 15.11.2010, 12.00 Uhr

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)Sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung und  $R(A)$  der Bildraum,  $N(A)$  der Kern von  $A$ .

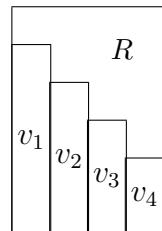
- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A^*)$ .  
 (b) Zeigen Sie, dass  $N(A^*A) = N(A)$ .

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)Die  $n \times m$ - Matrix  $A$  liege in der QR-Zerlegung  $A = QR$  vor. Geben Sie Formeln zur Berechnung von  $\tilde{Q}\tilde{R} = \tilde{A}$  mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^T \\ A \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}^m$$

unter Benutzung der QR-Zerlegung von  $A$  an.**Aufgabe 3:** (4 Punkte)Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und positiv definit,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie: $x = x_0$  minimiert  $\frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn  $Ax_0 = b$ .**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: Montag, 15.11.2010, 12.00 Uhr)**

- (a) Schreiben Sie ein Programm zur QR-Zerlegung einer  $(n \times m)$ -Matrix  $A$  ( $n \geq m$ ). Dieses Programm soll eine  $((n+1) \times m)$ -Matrix zurückgeben, deren oberer rechter Teil die Matrix  $R$  enthält. In den Spalten unterhalb von  $R$  befinden sich die Vektoren  $v_j$  zur Berechnung der Matrizen  $Q_j$ , z.B.:



- (b) Sei  $b$  ein Vektor der Länge  $n$ ,  $A = QR$  die QR-Zerlegung einer  $n \times m$  Matrix  $A$ . Schreiben Sie ein weiteres Programm zur Berechnung von  $Q^T b$ .  
 (c) Testen Sie Ihr Programm an der  $n \times m$ -Matrix  $A$ , mit  $A_{i,k} = \frac{1}{i+k-1}$  für  $n = 100, 200$ ,  $m = 50, 100$ . Wählen Sie  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{i+k-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Berechnen Sie mit (a), (b) eine kleinste Quadrate Lösung von  $Ax = b$ .