Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 4, Abgabe: Montag, 08.11.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Sei $Q = I - 2vv^T$ mit $v \in \mathbb{R}^n$, $v^Tv = 1$ und Einheitsmatrix E die Householder-Transformation. Zeigen Sie, dass Q die Abbildungsmatrix einer geometrischen Spiegelung an der Hyperebende $H := \left\{y \in \mathbb{R}^n | v^T y = 0\right\}$ ist.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie den Aufwand an, der bei der Berechnung von $Qx = x - 2v(v^Tx)$ notwendig ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $n \geq m$ hat Hessenberg-Form, wenn $A_{ij} = 0$ für $i > j+1$.

(a) Zeigen Sie, dass jede $n \times n$-Matrix A durch Ähnlichkeitstransformationen aus $n-2$ unitären Matrizen

$$B := Q^T AQ = Q_{n-2}^T ... Q_1^T AQ_1 .... Q_{n-2}$$

auf Hessenberg-Form gebracht werden kann. Hinweis: Verwenden Sie die Housholder-Matrizen

$$Q_j = \left(\begin{array}{c|c} I_j & 0 \\ \hline 0 & \hat{Q}_j \end{array}\right)$$

mit $\hat{Q}_j = I - 2v_j v_j^T$ und gehen Sie wie bei der QR-Zerlegung vor.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Hessenbergmatrix. Wieviel Rechenoperationen braucht die QR-Zerlegung von A nach Householder?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Householder-Verfahrens die Matrizen Q und R. Lösen Sie am Ende das Gleichungssystem $Rx = Q^Tb$ mit $b = (-1, 7, 2)^T$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab indem Sie den Matlab-Befehl \ verwenden.