Dr.Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Marzena Franek WS 10/11

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 3, Abgabe: Dienstag, 02.11.2010, 10.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei A eine invertierbare nxn-Matrix, b ein Vektor der Länge n. Der Algorithmus zur Lösung von $Ax = b$ sieht dann wie folgt aus:

1. Faktorisiere $A = LR$ mit der Gauß-Elimination.
2. $Ly = b$ Bestimme y durch Vorwärtssubstitution.
3. $Rx = y$ Berechne x durch Rückwärtssubstitution.

(a) Geben Sie die Gesamtkosten für die Lösung eines linearen Gleichungssystems an.

(b) Wie groß ist der Aufwand zur Inversion einer Matrix, also der Lösung des Gleichungssystems $AX = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist?

(c) Nehmen Sie an, dass A eine Bandmatrix der Bandbreite b ist mit

$$A_{ik} = 0 \text{ für } |i-k| > b.$$

Bestimmen Sie für diesen Fall den Aufwand für den Eliminationsschritt ohne Spaltenpivotsuche. Was passiert, wenn Sie pivotisieren müssen (qualitativ)?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Spaltenpivotsuche. Führen Sie dabei alle Zwischenschritte auf.

b) Berechnen Sie dann mit Hilfe der obigen Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b = (2, 1, 2, -1)^T$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & & & \\ c_2 & a_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

wobei sich A durch Gaußelimination zerlegen lässt in $A = LR$.

(a) Wie sehen die Matrizen L und R aus?

(b) Zeigen Sie: Eine invertierbare Matrix besitzt genau dann eine LR-Zerlegung (d.h. die Elimination ist ohne Pivotisierung durchführbar), wenn keine ihrer Hauptminoren verschwindet.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: Montag, 08.11.10, 11.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Es soll sowohl die Berechnung mit als auch ohne Spaltenpivotsuche möglich sein.
Die Matrix A und der Vektor b sollen übergeben werden. Nach dem Ablauf des Programms soll in der Matrix A die LR-Zerlegung gespeichert sein, in dem Vektor b die Lösung x. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor ausgegeben werden.

(a) Testen Sie das Programm an Aufgabe 2.

(b) Berechnen Sie mit und ohne Spaltenpivotsuche die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad l = 0, \dots, 20\,.$$

(c) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem aus der Vorlesung für $a = 1$ und $a = 1e - 10$ mit der rechten Seite $b = (1, 1)$. Stören Sie die rechte Seite mit einem Fehler von 10% und vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler, den Ihr Programm liefert, mit dem unvermeidbaren Fehler. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

(d) Vergleichen Sie die Rechenzeit Ihres Algorithmus mit der Rechenzeit der Matlab-Routine $A\backslash b$. Zur Zeitmessung benutzen Sie die Matlab-Funktionen `tic` und `toc`. Machen Sie sich mit dem Matlab-Befehl `rand` vertraut, um eine Zufallsmatrix A und einen Zufallsvektor b zu erzeugen. Wählen Sie $n = 5, 10, 50, 100, 1000$.
Die Matlab-Routine $A\backslash b$ arbeitet parallelisiert, d.h. auf mehreren Rechenkernen gleichzeitig. Um einen genauen Vergleich machen zu können sorgen Sie am besten mit dem Befehl » `maxNumCompThreads(1)` dafür, dass nur auf einem Kern gerechnet wird.