Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 2, Abgabe: Montag, 25.10.2010, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mi.	08.00 - 10.00 Uhr	N1
Gruppe 2:	Mi.	12.00 - 14.00 Uhr	N3
Gruppe 3:	Mi.	16.00 - 18.00 Uhr	N1

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ betrachten wir die pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

mit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0, p > 0$. Zeigen Sie, dass für $q \to 0$ die Verstärkungsfaktoren der pq-Formel betragsmäßig gegen eins konvergieren.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $R = \{\rho | \, |\log \rho| \leq eps\}$ und rd bezeichnet die Rundung einer Zahl. Sei $x \neq 0$, zeigen Sie:

(a) $\left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| \leq eps.$

(b) Es gibt ein $\rho \in R$, so dass $rd(x) = \rho x$. Hinweis: $1 + x \leq e^x$.

(c) Seien ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \in R$. Dann sind $\sqrt{\rho_1 \rho_2} \in R$ und $1/\rho_3 \in R$.

(d) Zeigen Sie: $(a_0 \oplus (a_1 \oplus a_2))$ ist rückwärtsstabil. Hinweis: $a \oplus b = \mathrm{rd}(a + b) = \rho(a + b)$ für ein $\rho \in R$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
V, W seien normierte Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass für den linearen Operator $A : V \to W$ die folgendermaßen induzierte Operatornorm

(a)

$$|||A||| = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} = \max_{\|x\|_V = 1} \|Ax\|_W$$

eine eine Norm ist.

(b) Die Operatornorm ist verträglich mit der Vektornorm, d.h. es gilt

$$||Ax||_W \leq |||A||| \, ||x||_V, \ \forall \, x \in V, A \in L(V, W).$$

(c) Es gilt die Submultiplikativität

$$|||AB||| \leq |||A||| \, |||B||| \, , \ \forall \, A, B \in L(V, W).$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Die p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind für $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

und für $p = \infty$ durch

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für die zugeordneten Matrixnormen

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die folgenden Aussagen:

a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Mit $\|\cdot\|$ werde eine Vektornorm des $\mathbb{R}^n$ und die zugeordnete Matrix-Norm bezeichnet. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ die Kondition von A ($\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$). Beweisen Sie:

(b) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$,

(c) $\kappa_2(Q) = 1$, wenn Q orthogonal,

(d) $\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$, wenn Q orthogonal.