Probeklausur zur Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Aufgabe 1

(a) Erläutern Sie den LR-Algorithmus mit Pivotsuche.

(b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung und geben Sie die Pivotmatrix P an.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung.

Aufgabe 2

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$ gelte $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) = 0$ und $f''(\bar{x}) \neq 0$, d.h. f hat eine doppelte Nullstelle in $\bar{x}$. Wir betrachten das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - c\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Was ist die optimale Wahl von $c \in \mathbb{R}$, um quadratische Konvergenz des Verfahrens zu erhalten?

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung für f und f' um den Punkt $\bar{x}$ bis zur Ordnung drei.

Aufgabe 3

Zu den Messpunkten

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

soll eine Ausgleichsgerade $u(x) = a + bx,\ a,\ b, \in \mathbb{R}$, gelegt werden.

(a) Stellen Sie die Normalengleichung zu diesem Ausgleichsproblem auf und berechnen Sie daraus die optimalen Parameter $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie für die Matrix A aus der Normalengleichung die Matrix R der QR–Zerlegung mit Hilfe der Householder-Transformation.

Aufgabe 4

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Jede Komponente von b sei mit einem Messfehler von 10 Prozent behaftet.

(a) Bestimmen Sie ein $\tilde{b}$ und schätzen Sie den relativen und den absoluten Fehler der Lösung des linearen Gleichungssystems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ ab. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

(b) Wir betrachten nun eine Störung der Matrix A und erhalten ein gestörtes Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der Fehler $\|\tilde{A} - A\|_\infty$ sein, damit $\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq 0.8$ gilt?

Aufgabe 5

Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x) - x$$

im Intervall $I = [-10, 10]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in I genau eine Nullstelle besitzt.

(b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation x_2 eine Fehlerabschätzung an.

(c) Nennen Sie ein Verfahren, das ein besseres Konvergenzverhalten hat (Begründung!). Geben Sie die Iterationsvorschrift für dieses Problem explizit an.

Aufgabe 6

(a) Geben Sie das Einzelschritt-Verfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an.

(b) Zeigen Sie, dass das Einzelschritt-Verfahren für folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergent ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 4 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix A. Was können Sie über die Lage der Eigenwerte sagen?

(b) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

(c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (1,0,0)^T$ drei Schritte der Vektoriteration \ Potenzmethode durch. Geben Sie eine Approximation des größten Eigenwerts und des zugehörigen Eigenvektors an.

(d) Formulieren Sie die inverse Vektoriteration. Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (1,0,0)^T$ zwei Schritte der inversen Vektoriteration durch. Geben Sie eine Approximation des kleinsten Eigenwerts und des zugehörigen Eigenvektors an.