Übungen zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

Übungsblatt 9, Abgabe: **Do, 20.12.07, 12.00 Uhr,** Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beweisen Sie die Stabilitätsabschätzung aus Satz 4.5.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei Ω ein Lipschitz–Gebiet. Sei $\gamma \in C(\partial\Omega)$, $\gamma(x) > 0$ für $x \in \partial\Omega$, $g \in L_2(\partial\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$.

1. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $u \in H_1(\Omega)$, so dass für alle $v \in H_1(\Omega)$ gilt
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma u v \mathrm{d}s = \int_\Omega f v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g v \mathrm{d}s.$$
2. Bestimmen Sie eine geeignete nichttriviale Differentialgleichung, so dass u für $u \in H^2$ Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei E das Finite Element mit $E = \Delta(a_1, a_2, a_3)$, $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{P}_3 : \varphi(p) = 0\}$, $\varphi(p) = 6p(a_4) - 2\sum_{l=1}^3 p(a_l) + \sum_{l=1}^3 \nabla p(a_l)(a_l - a_4)$, a_4 Schwerpunkt von E, und
$\Phi = \{D^\alpha p(a_l) : |\alpha| \leq 1,\ l = 1\ldots 3\}$. Das Element heißt Zienkiewicz–Dreieck. Zeigen Sie: Das Element ist unisolvent, und $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Formfunktionen des dreieckig–hermitschen kubischen Elements für das Einheitsdreieck für die Auswertungen von Funktion und Ableitungen am Nullpunkt sowie für die Auswertung im Schwerpunkt.

Aufgabe 5: (4 Punkte)
(Über die Weihnachtsferien:)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = \cup_{k=0}^5 E_k$. Hierbei ist $E_k = \{x + (0,k) : x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |x|_1 \leq 2\}$, $k = 1..5$, und $E_0 = \{x + (0, 1/2) : x \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty \leq 1/2$.

1. Zeichnen Sie Ω und definieren Sie es als Grundgebiet in der PDE–Toolbox.
2. Lösen Sie mit der PDE–Toolbox die Aufgabe $\Delta u = f$ auf Ω, wobei $f(x) = 1$, falls $||x - z_j||_\infty < 0.1$ für ein j von 1 bis 3 und $f(x) = 0$ sonst, sowie $z_1 = (1, 2.1)$, $z_2 = (-1, 3.1)$, $z_3 = (0, 4.1)$. Setzen Sie die Colormap auf Hot und beschreiben Sie das Ergebnis.