Übungen zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

Übungsblatt 8, Abgabe: **Do, 13.12.07, 12.00 Uhr,** Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Machen Sie sich mit der PDE–Toolbox von Matlab vertraut. Lösen Sie die Aufgabe 3 aus Blatt 4 mit der PDE–Toolbox. Nutzen Sie Grid–Verfeinerung, um glatte Ergebnisse zu erzielen. Stellen Sie das Ergebnis mit den verschiedenen Plot-Optionen dar. Lösen Sie dieselbe Randwertaufgabe für das Gebiet $0.5 < ||x|| < 1$, $u(x) = 0$ für $r = 0.5$, $u(x) = 1$ für $r = 1$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zeigen Sie die Friedrichs–Ungleichung

$$\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{dx} \leq C \int_\Omega ||\nabla v(x)||_2^p \mathrm{dx}$$

für $p = 2$ und $v(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung: Fast alle Normierungssätze, die wir bewiesen haben, besitzen Entsprechungen im $W^{s,p}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

1. Folgern Sie aus dem Satz von Rellich und Kondrachov wie im Beweis zu Satz 4.18 das Bramble–Hilbert–Lemma:

   Sei Ω ein Lipschitz–Gebiet. Sei f_j, $j = 1 \dots N$, ein System von Halbnormen auf $H^s(\Omega)$. f_j sei stetig bzgl. $|| \cdot ||_{H^s(\Omega)}$, also $f_j(v) \leq C_j ||v||_{H^s(\Omega)}$. Außerdem gelte: Falls v ein Polynom vom Grad $\leq s - 1$ ist, und $f_j(v) = 0$ für $j = 1 \dots N$, so ist schon $v = 0$.

   Weiter sei
   $$||v||_* = \sum_{j=1}^N f_j(v) + |v|_{H^s(\Omega)}.$$
   Dann ist $|| \cdot ||_*$ äquivalent zu $|| \cdot ||_{H^s(\Omega)}$.

2. Sei Γ eine Teilmenge des Randes von Ω mit positivem Oberflächenmaß. Zeigen Sie: Die durch $||u||_*^2 = |\int_\Gamma u(x) d\sigma(x)|^2 + |u|_{H^1(\Omega)}^2$ definierte Norm ist äquivalent zu $|| \cdot ||_{H^1(\Omega)}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei V ein Hilbertraum, a eine V-elliptische (stetige und koerzive) Bilinearform auf V, $f \in V$. Nach dem Lemma von Lax und Milgram gibt es genau ein u mit $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie: Ist a symmetrisch, so minimiert u das Funktional $s(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$ in V.