

Übungen zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”Übungsblatt 7, Abgabe: **Do, 6.12.07, 12.00 Uhr**, Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $\Omega = \{\|x\|_2 < 1/2\}$. Zeigen Sie: $f(x) := \log \log 1/\|x\|_2$ ist in $H^1(\Omega)$. Hinweis: Benutzen Sie Polarkoordinaten und zeigen Sie, dass die Ableitungen nach r und φ existieren.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Für genau welche k sind die folgenden Funktionen in $H^k(\Omega)$?

1. $\Omega = (-1, 1)$, $f_1(x) = \operatorname{sgn}(x)x^2$.
2. $\Omega = (-1, 1)$, $f_2(x) = |x|^{1/2}$.
3. $\Omega = (-2, 2)^2$, $f_3(x) = \max(0, 1 - \|x\|^2)$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitz-Gebiet. Zeigen Sie:

1. Seien $f, g \in H^k(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha(f + g) = D^\alpha f + D^\alpha g$, $|\alpha| \leq k$.
2. Seien $f \in H^1(\Omega)$, $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha(fg) = gD^\alpha f + fD^\alpha g$ für $|\alpha| = 1$.
3. Seien $f, g \in H^1(\Omega)$. Dann ist $D^\alpha(fg) = gD^\alpha f + fD^\alpha g$ für $|\alpha| = 1$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei Ω ein Lipschitzgebiet und zusammenhängend. Sei $f \in H^k(\Omega)$ und $D^\alpha f = 0$ für alle α mit $|\alpha| = k$. Zeigen Sie: Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq k - 1$.

Hinweis: Zeigen Sie den Satz zunächst für $f \in C^\infty(\Omega)$.