

Übungen zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”Übungsblatt 6, Abgabe: **Do, 29.11.07, 12.00 Uhr**, Übungskasten 84**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung, Lemma 3.2, sei Ω_h eine Diskretisierung des Rechtecks $(0, \pi)^2$ mit der Schrittweite $h = \pi/N$. Das Skalarprodukt für Gitterfunktionen f, g auf Ω_h bzw. $\overline{\Omega_h}$ sei definiert durch

$$(f, g) = h^2 \sum_{j,k} f(x_{j,k}) g(x_{j,k}).$$

1. Zeigen Sie: $v^m(x_{j,k}) = \sin(m_1 x_{j,k}) \sin(m_2 x_{j,k})$, $m = (m_1, m_2) \in [1, N-1]^2$, ist eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren für den Fünfpunktstern Λ mit homogenen Randbedingungen.
2. Formulieren sie Lemma 3.2 um mit diesem Skalarprodukt.
3. Wie lautet die Aussage des Satzes für $h \mapsto 0$?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

1. Zeigen Sie: $\operatorname{sgn}(x)$ besitzt keine verallgemeinerte Ableitung.
2. Sei $f : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}$, f stetig, $f|_{(-1,0) \cup (0,1)}$ stetig differenzierbar, alle Richtungsableitungen existieren bei 0. Berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung von f , wenn sie existiert.
3. Berechnen Sie die verallgemeinerte Ableitung D^α von $|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, für $|\alpha| = 1$, wenn sie existiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Das in der Vorlesung vorgestellte Schema $\Lambda' u = -\varphi$, $\Lambda' = \Lambda_x + \Lambda_y + \frac{1}{6} h^2 \Lambda_x + \Lambda_y$, $\varphi = \Lambda' f$, konvergiert mit der Ordnung h^4 .

1. Stellen Sie das Gleichungssystem für den Konvergenzfehler e auf.
2. Sei $A_x u = -\Lambda_x u$. Zeigen Sie: A_x ist positiv definit bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 2. Geben Sie obere und untere Schranken für $(A_x, u)/(u, u)$ an (bzw. $A_y u$).
3. Folgern Sie: $\|\Lambda e\|_2 \leq C \|\Lambda' e\|_2$.
4. Folgern Sie mit Aufgabe 1: Das Schema ist konvergent von der Ordnung 4.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur schnellen Lösung der Poissonsgleichung mit FFTs. Benutzen Sie die Implementation der schnellen Fouriertransformation in Matlab.

Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Aufgabe 3 von Blatt 4 mit Randwert 0. Wählen Sie eine sehr feine Diskretisierung und vergleichen Sie die Laufzeiten und Ergebnisse.