Übungen zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”

Übungsblatt 5, Abgabe: **Do, 25.10.07, 12.00 Uhr,** Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Randwertaufgabe:

$$-u'' = f, \text{ auf } (-1,1),\ u(-1) = u(1) = 0$$

und eine Diskretisierung der Form

$$\frac{1}{h^2}(\alpha_{i,0}u_{i-1} + \alpha_{i,1}u_i + \alpha_{i,2}u_{i+1}) = \sum_{j=1}^{J} \beta_{i,1} f(\tau_{i,j})$$

mit $\sum_j \beta_{i,j} = 1$ und $x_i = ih$.

Bemerkung: Die hier entwickelten Diskretisierungen besitzen alle wie in der Vorlesung eine höherdimensionale Entsprechung.

1. Zeigen Sie: Ist die Diskretisierung exakt für alle $u \in \mathcal{P}_m$, $u_i = u(x_i)$, so ist das Verfahren konsistent von der Ordnung $m - 1$.
2. Bestimmen Sie für $J = 3$ ein Verfahren der Ordnung 4, das u mit dem Standard–Stern diskretisiert und für das $\tau_{i,j} = x_{i-2+j}$ gilt.
3. Können Sie eine noch höhere Diskretisierungsordnung erreichen?

Hinweis: Betrachten Sie ohne Einschränkung $x_0 = 0$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wählen Sie in der vorhergehenden Aufgabe $J = 2$ und als Diskretisierung von u wieder den Standardstern. Können Sie die verbleibenden Parameter β und τ so wählen, dass ein Verfahren der Ordnung 4 entsteht?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei nun

$$-u'' + cu = f$$

für Konstanten c und f, ansonsten wie oben. Bestimmen Sie einen Dreipunktstern, so dass die diskrete Lösung exakt ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Betrachten Sie die Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf $(0, \pi) \times (0, \infty)$ und die Anfangswertaufgabe $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = g(x)$ für $x \in (0, \pi)$, $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$.

1. Berechnen Sie die analytische Lösung, indem Sie u als Sinusreihe schreiben.

2. Berechnen Sie u numerisch mit einem beliebigen (konsistenten) Differenzenschema.

3. Unabhängig davon, welches Verfahren Sie wählen, bekommen Sie kein stabiles Verfahren. Begründen Sie das mit der analytischen Lösung. Haben Sie eine Idee, wie man ein stabiles Verfahren bekommen könnte?

   Hinweis: Schreiben Sie die Lösung als $u = u_0 + u_1$, wobei u_0 ein stabiler Anteil ist.