

Übungen zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”Übungsblatt 4, Abgabe: **Do, 15.11.07, 12.00 Uhr**, Übungskasten 84**Aufgabe 1:** (4 Punkte)Die Poissongleichung auf dem zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

soll mit dem Fünfpunktstern und Schrittweite h diskretisiert werden. Sei $\Omega_h \subset h\mathbb{Z}^2$ das zugehörige Gitter. Das daraus entstehende Gleichungssystem bezeichnen wir mit $L_h u_h = f_h$.

1. Argumentieren Sie, dass unabhängig von der Anordnung der Indizes die Systemmatrix L_h symmetrisch ist.
2. Zeigen Sie, dass L_h unabhängig von der Anordnung der Indizes diagonaldominant ist.
3. Zeigen Sie, dass die Systemmatrix L_h unabhängig von der Anordnung der Indizes eine M-Matrix ist.
4. Zeigen Sie, dass die Systemmatrix L_h immer positiv definit ist.
5. Sei konkret $\Omega = (0, 1)^2$, $h = 1/4$. Wie lautet die Systemmatrix für die folgenden Nummerierungen (zeilenweise, diagonal, Schachbrett):

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & 1 & 2 & 4 & \cdot & \cdot & 1 & 6 & 2 & \cdot \\ \cdot & 4 & 5 & 6 & \cdot & \cdot & 3 & 5 & 7 & \cdot & \cdot & 7 & 3 & 8 & \cdot \\ \cdot & 7 & 8 & 9 & \cdot & \cdot & 6 & 8 & 9 & \cdot & \cdot & 4 & 9 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Hinweis: Geben Sie jeweils nur Symbole für Diagonal- und Außerdiagonalelemente an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Diskretisieren Sie als Beispiel für ein ADI-Verfahren A_1 durch D_x^2 , A_2 durch D_y^2 in der Definition der Vorlesung.

1. Untersuchen Sie Stabilität und Konsistenz des entstehenden Verfahrens.
2. Geben Sie ein numerisches Verfahren an (einschließlich der Nummerierung), bei dem nur Tridiagonalmatrizen invertiert werden müssen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Diskretisieren Sie die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 3x^2, & (x, y) \in \Omega = (-1, 1)^2 \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, x \neq 1 \\ u(1, y) &= \frac{1}{4} \cos(\pi y/2), & y \in (-1, 1) \end{aligned}$$

unter Benutzung des Standard-Fünfpunktsterns mit der Schrittweite $h = \Delta x = \Delta y = 1/8$. Berechnen Sie eine Näherungslösung und geben Sie diese graphisch aus. Benutzen Sie in Matlab eine sparse (dünn besetzte) Matrix zur Berechnung der Systemmatrix. Wenn Sie wollen: Untersuchen Sie, was passiert, wenn Sie feinere Diskretisierungen bei einer vollen Matrix benutzen.

Hinweis: Auf der Webseite von Blatt 2 können Sie wieder eine Vergleichslösung berechnen.