Übungen zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

Übungsblatt 3, Abgabe: **Do, 8.11.07, 12.00 Uhr,** Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gegeben sei die Dirichlet–Aufgabe

$$-u''(x) = f(x),\ u(0) = u(1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass für die Diskretisierung $-D_x^2 u_j = f_j$, $j = 0, \ldots, J$:

1. das entstehende Gleichungssystem $Au = f$ eindeutig lösbar ist.
2. die Monotonie–Eigenschaft gilt, d.h.: Sei $f_1 \leq f_2$, dann ist $A^{-1}f_1 \leq A^{-1}f_2$ (jeweils punktweise).

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir betrachten das folgende Differenzenverfahren für die Konvektions–Diffusionsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= a u_{xx} - b u_x,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

mit $a > 0$ und $b > 0$. Weiter sei $P_e = \frac{bh}{2a} \leq 1$ und $2a\Delta t \leq h^2$.
Zeigen Sie: Das Schema

$$D_t^+ u_j^n = a D_x^2 u_j^n - b D_x^0 u_j^n$$

ist stabil in der Maximumsnorm.

Hinweis: Lösen Sie das Gleichungssystem nach u_j^{n+1} auf.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Lösen Sie Wärmeleitungsgleichung wie in Aufgabe 4, Blatt 2, numerisch für das Grundgebiet $\Omega = (0,\pi)^2$, die Anfangsbedingung $u_0(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ und die Randbedingung $u(x,y,t) = 0$ für (x,y) aus $\partial\Omega$ mit einem θ–Verfahren. Wie lautet in diesem Fall die analytische Lösung?