Dr. Frank Wübbeling WS 2007/2008

Übungen zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

Übungsblatt 2, Abgabe: **Fr, 2.11.07, 10.00 Uhr,** Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ für $0 < x < \pi$ und $t > 0$. Gegeben seien die Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ und $u(x,0) = u_0(x)$, $u_0 \in L^2(0,\pi)$. Lösen sie die Gleichung analytisch mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ (Separation der Variablen). Hinweis: Entwickeln Sie φ in eine Fourierreihe.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Konstruieren Sie einen Differenzenoperator für die zweite Ableitung $u''(x)$ einer glatten Funktion u durch Verwendung der Gitterpunkte $u(x \pm 2h)$, $u(x \pm h)$ und $u(x)$, so dass eine Approximation mit Konsistenzordnung 4 entsteht.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zur Diskretisierung von $-u''(x) = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ wird ein nicht–äquidistantes Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$$

gewählt. Wir setzen $h_j = x_j - x_{j-1}$.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Diskretisierung konsistent ist:

$$\frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{u_j - u_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} \right) = f_j.$$

2. Vergleichen Sie den Konsistenzfehler mit dem des äquidistanten Gitters.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Wir betrachten die Wärmeleitungsaufgabe aus der ersten Aufgabe mit $u_0(x) = \sin(12x)$. Berechnen Sie mit Hilfe von Matlab Näherungen an u mit dem expliziten Eulerverfahren und mit dem Crank–Nicholson–Verfahren. Vergleichen Sie die genäherte und die analytische Lösung aus Aufgabe 1.

Ändern Sie nun die Rand– und Anfangsbedingungen wie folgt ab:
$u(0,t) = u(1,t) = 12\sin^2(12t)$, $u(x,0) = 0$. Berechnen Sie wieder eine Näherung. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der Lösung unter
`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/`. Versuchen Sie jeweils, mit einer möglichst groben Diskretisierung auszukommen.