

Übungen zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”Übungsblatt 10, Abgabe: **Do, 16.1.08, 12.00 Uhr**, Übungskasten 84

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei E ein Dreieck. Eine Quadraturformel $\tilde{I} = \alpha \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$ für das Integral $I = \int_E f(x) dx$ heißt von der Klasse $\mathcal{P}_k$, wenn die Polynome vom Grad $\leq k$ durch die Formel exakt integriert werden. Bestätigen Sie die folgenden Aussagen über Quadraturformeln. Hinweis: Es reicht, wenn Sie die Aussage für das Einheitsdreieck beweisen (alle anderen Dreiecke lassen sich durch affine Abbildungen erzeugen).

1. $n = 1$, $a_1 = 1$, $\alpha = |E|$, x_1 ist Mittelpunkt von E : Klasse $\mathcal{P}_1$
2. $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\alpha = |E|/3$, x_k ist Seitenmittelpunkt von E : Klasse $\mathcal{P}_2$
3. $n = 7$, $a_1 = 27$, $a_2 = a_3 = a_4 = 3$, $a_5 = a_6 = a_7 = 8$, $\alpha = |E|/60$, x_1 ist Mittelpunkt von E , x_2, x_3, x_4 sind Ecken von E , x_5, x_6, x_7 sind Seitenmittelpunkte von E : Klasse $\mathcal{P}_3$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Lösen Sie $-\Delta u = 1$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, für $\Omega = (0, 1)^2$ und der in der Vorlesung angegebenen Triangulierung mit $2n^2$ Dreiecken. Verwenden Sie dreieckig-Lagrangesche Elemente.

Zeigen Sie: In diesem Spezialfall ist die Finite Elemente-Lösung äquivalent zu diskreten Differenzen. Vergleichen Sie die Konvergenzaussagen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Lösen Sie Aufgabe 2 mit bilinearen Lagrangeschen viereckigen Elementen und einer Pixel-Diskretisierung.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Machen Sie sich mit der Software FEMLAB vertraut. Aufruf auf den Rechnern der Mathematik:

```
environ numeric  
matlab-class  
femlab
```

Lösen Sie als Beispiel die Poissongleichung $-\Delta u = 1$ auf dem Gebiet $(-1, 1)^2 - K_{1/2}(0)$ mit verschiedenen Elementen.

Achtung: Es steht lediglich eine Einzellizenz von FEMLAB zur Verfügung. Sie können im Menüpunkt About feststellen, ob Sie eine Lizenz haben.