Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Das klassische Anfangswertproblem

7.1 Einführung: Modellierung populationsdynamischer Prozesse

Ein einfaches Modell zum Bevölkerungswachstum

Es bezeichne $y(t)$ die Größe einer Population in einem abgeschlossenen System zum Zeitpunkt t, z.B. die Anzahl der Menschen auf der Erde, der Fische in einem See usw.
Für $\Delta t > 0$ ist dann $y(t + \Delta t) - y(t)$ offensichtlich die Differenz zwischen den Geburten und den Todesfällen in Zeitraum $[t, t+\Delta t]$. Wenn man die realistische Annahme zugrunde legt, daß die Geburten und Todesfälle proportional zur Bevölkerung sind, mit positiven Proportionalitätskonstanten b (birth) und d (death), dann erhält man

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} by(s)ds - \int_t^{t+\Delta t} dy(s)ds.$$

Wenn man noch annimmt, daß $y(t)$ differenzierbar ist (was in der Realität nie ganz richtig sein kann, da $y(t)$ offensichtlich ganzzahlig und nicht konstant ist), erhält man nach Division durch Δt und Grenzübergang $\Delta t \to 0$

$$y'(t) = (b - d)y(t) =: cy(t) \tag{7.1}$$

Für alle $K \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich $y(t) = Ke^{(b-d)t}$ eine Lösung hiervon. Um eine *eindeutige* Lösung zu erhalten, muß man den Wert von $y(t)$ zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ festlegen.

Das Modell sagt aus, daß die Wachstumsrate $y'(t)$ proportional zur Population selber ist. Für $b > d$ (mehr Geburten als Todesfälle) erhält man unbeschränktes exponentielles Wachstum der Population, für $b < d$ (mehr Todesfälle als Geburten) stirbt die Population exponentiell schnell aus. Man sieht, daß zumindest im ersten Fall das Modell unrealistisch ist, denn in einem abgeschlossenen System mit begrenzten Ressourcen (Wasser, Nahrung) wird es eine obere Grenze $\bar{y}$ geben, die $y(t)$ nicht überschreiten kann. Wir nehmen deshalb an, daß die Wachstumsrate $y'(t)$ immer noch proportional zu $y(t)$ ist, daß aber der

Proportionalitätsfaktor gegen 0 geht, wenn $y(t)$ sich $\bar{y}$ annähert. Das ist z.B. der Fall bei dem Modell

$$y'(t) = c\left(1 - \frac{y(t)}{\bar{y}}\right) y(t) \tag{7.2}$$

Für $y(t)/\bar{y}$ klein hat man $y'(t) \simeq cy(t)$, also fast exponentielles Wachstum, für $y(t) \simeq \bar{y}$ dagegen $y'(t) \simeq 0$, also fast Nullwachstum.

Zur allgemeinen Lösung von (7.2) dividieren wir durch $(1 - \frac{y}{\bar{y}})y$, integrieren von t_0 bis t und benutzen Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{(1 - \frac{y(s)}{\bar{y}})y(s)} ds &= \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{\bar{y} - y(s)} + \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} \left\{\ln|y(s)| - \ln|\bar{y} - y(s)|\right\} ds \\ &= \ln\frac{|y(t)|}{|\bar{y} - y(t)|} - \ln\frac{|y(t_0)|}{|\bar{y} - y(t_0)|} = c(t - t_0).\end{aligned}$$

Falls $0 < y(t_0) < \bar{y}$ und $y(t)$ stetig um t_0 ist, können wir auch annehmen, daß $0 < y(t) < \bar{y}$ in einer Umgebung von t_0, die Betragstriche können also wegfallen, und wir erhalten

$$\frac{y(t)}{\bar{y} - y(t)} = e^{ct} \cdot e^{-ct_0} \cdot \frac{y(t_0)}{\bar{y} - y(t_0)} =: K \cdot e^{ct}, \quad K := \frac{e^{-ct_0} y(t_0)}{\bar{y} - y(t_0)}$$

und schließlich

$$y(t) = \frac{\bar{y}Ke^{ct}}{Ke^{ct} + 1} = \frac{\bar{y}K}{K + e^{-ct}}. \tag{7.3}$$

Will man die spezielle Lösung zu einem bestimmten Anfangswert $y(t_0) = y_0$ haben, so muß man die entsprechenden Werte in K einsetzen. Für den hier betrachteten Fall $0 < y_0 < \bar{y}$ ist K immer positiv. Andererseits ist für jedes $K \in \mathbb{R}$ (7.3) eine Lösung von (7.2).

Speziell für $t_0 = 0$, $y(t_0) = y_0 = 1$, $\bar{y} = 1000$, $c = 1$ erhalten wir

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-t}}.$$

Abb. 7.1 zeigt den Graphen von $y(t)$ für die beiden Modelle (7.1) und (7.2). Man sieht, daß sie für kleine t fast übereinstimmen (exponentielles Wachstum), für größer werdende t sich jedoch das Wachstum des zweiten Modells immer mehr abschwächt.

Das klassische Räuber-Beute-Modell von Lotka–Volterra

Ein komplizierteres Beispiel ist das folgende klassische Räuber-Beute-Modell für die Interaktion zweier Spezies $b(t)$ (Beute) und $r(t)$ (Räuber):

$$b' = f_1(b, r)b, \quad r' = f_2(b, r)r. \tag{7.4}$$

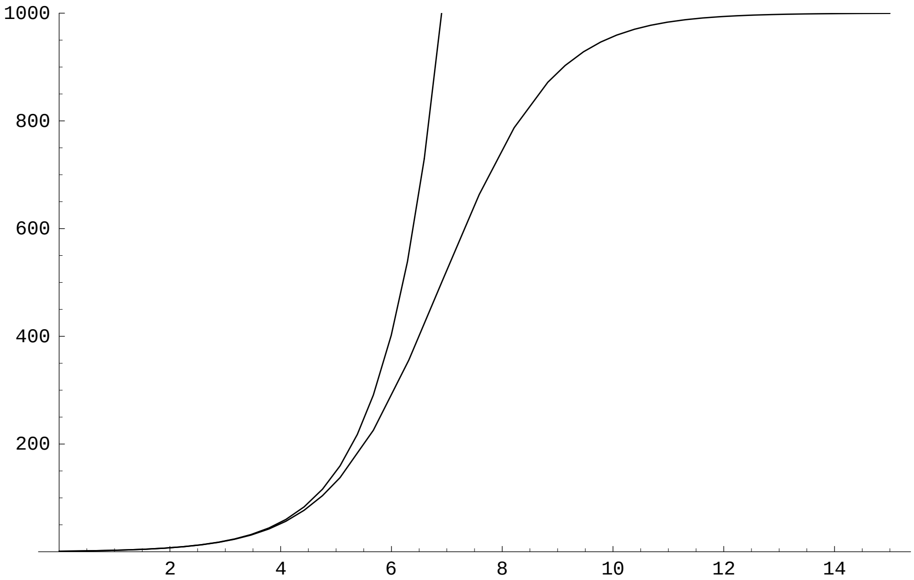

Abbildung 7.1: Lösungen von (7.1) (e^t) und (7.2) ($1000/(1+999e^{-t})$)

Auch hier haben wir den Ansatz gemacht, daß die Wachstumsraten von b und r proportional zu b bzw. r selber sind und die Proportionalitätsfaktoren von den Populationen abhängen. f_1 und f_2 sollten jetzt so gewählt werden, daß sie typische Merkmale eines solchen ökologischen Systems wiederspiegeln, wie etwa:

- In Abwesenheit von Räubern wächst die Beute exponentiell, also $f_1(b, 0) > 0$.
- Wenn die Anzahl der Räuber zunimmt, nimmt die Wachstumsrate für die Beute ab: $\dfrac{\partial f_1}{\partial r}(b, r) < 0$.
- In Abwesenheit von Beute sterben die Räuber exponentiell aus: $f_2(0, r) < 0$.
- Wenn die Beutepopulation zunimmt, dann wird auch die Wachstumsrate für die Räuber größer: $\dfrac{\partial f_2}{\partial b}(b, r) > 0$.
- Es gilt, einen ausgeglichenen Zustand $\bar{b} > 0$, $\bar{r} > 0$, bei dem kein Wachstum stattfindet, also $f_1(\bar{b}, \bar{r}) = f_2(\bar{b}, \bar{r}) = 0$. Das bedeutet gerade, daß immer genausoviel Beute nachwächst, wie von den Räubern gefressen wird.

Wir sehen, daß z.B. die linearen Faktoren

$$f_1(b, r) = 1 - \frac{r}{\bar{r}}, \quad f_2(b, r) = \frac{b}{\bar{b}} - 1$$

die fünf Forderungen erfüllen.

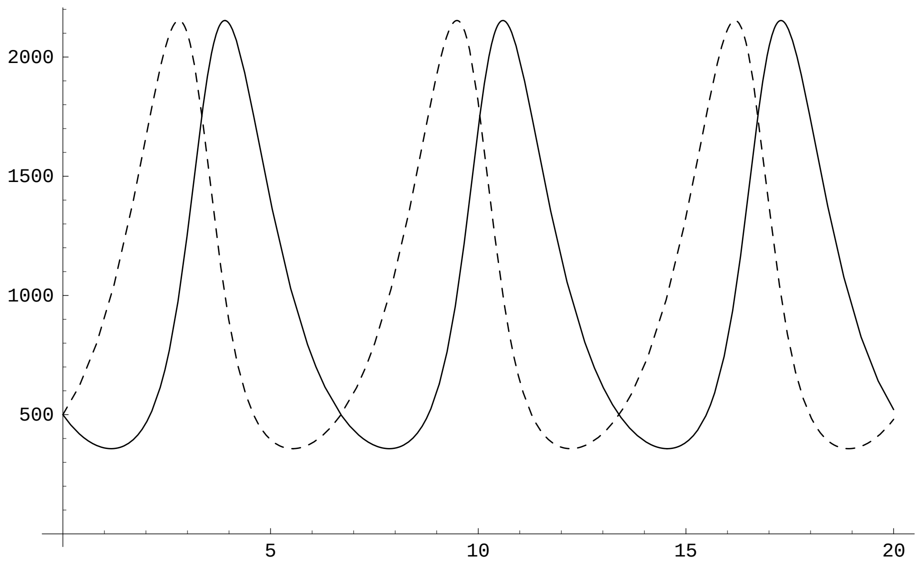

Abbildung 7.2: Numerische Lösung von (7.4) für $0 \leq t \leq 20$. Die gestrichelte Linie zeigt den Graphen von $b(t)$, die kontinuierliche Linie den Graphen von $r(t)$.

(7.4) ist ein System von Differentialgleichungen für zwei unbekannte Funktionen $b(t)$ und $r(t)$. Anders als in den ersten beiden Fällen kann eine exakte Lösung (außer der trivialen Lösung $b(t) = \bar{b}, r(t) = \bar{r}$) nicht mit elementaren Mitteln berechnet werden. Man ist auf eine numerische Lösung angewiesen.

Abbildung 7.2 zeigt eine numerische Lösung von (7.4) für $\bar{b} = \bar{r} = 1000$ zu den Startwerten $b(0) = r(0) = 500$. Beide Populationen zeigen offensichtlich periodisches Verhalten. Dies kann wie folgt begründet werden: Zu Beginn ($t = 0$, $b = r = 500$) gibt es nicht genügend Beute, um alle Räuber zu ernähren. Viele Räuber verhungern, was dem Wachstum der Beute zugute kommt. Irgendwann ist aber soviel Beute vorhanden, daß die wenigen übriggebliebenen Räuber Nahrung im Überfluß haben. Sie können sich nun schnell vermehren, was natürlich die Beute dezimiert, was wiederum zu einer Nahrungsknappheit für die vielen Räuber führt, usw.

Zumindest in diesem Punkt ist das Räuber-Beute-Modell also realistisch: Periodisches Wachstum und Abnehmen gewisser Spezies ist durch zahlreiche Untersuchungen bestätigt.

7.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Die bisher untersuchten Modelle führten alle auf Differentialgleichungen (DGL) der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{7.5}$$

Dabei ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \to y(t)$ die gesuchte (i.A. vektorwertige) Funktion als Lösung der DGL und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y) \to f(t, y)$, die rechte Seite der DGL (in den obigen Beispielen war immer $n = 1$ oder 2). Wir zeigen jetzt, daß unter bestimmten

Voraussetzungen an f und mit einer Festlegung der Lösung $y(t)$ an einem bestimmten Punkt t_0:

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \tag{7.6}$$

das Problem eine (lokal um (t_0, y_0)) eindeutige Lösung besitzt.

(7.5) zusammen mit (7.6) bezeichnet man als *Anfangswertproblem* (kurz: AWP). Es ist die einfachste und am besten untersuchte Form einer DGL. Viele naturwissenschaftichen Probleme lassen sich durch AWPe modellieren, wobei t oft die Zeit repräsentiert.

Satz 7.1 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf) *Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig um (t_0, y_0) bezüglich der zweiten Komponente, d.h. es gebe ein $L > 0$ und ein $\epsilon > 0$, so daß*

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq L \cdot ||y_1 - y_2||$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $|t - t_0| \leq \epsilon, ||y_1 - y_0|| \leq \epsilon, ||y_2 - y_0|| \leq \epsilon$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ mit $y(t_0) = y_0$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I_\delta$.

Beweis: Aus (7.5), (7.6) folgt nach Integration:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds =: (Gy)(t), \quad t \in I_\delta. \tag{7.7}$$

Wir zeigen mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß (7.7) eine eindeutige Lösung $y \in \mathcal{D} \subset C(I_\delta)$, $\mathcal{D}$ eine abgeschlossene Menge, besitzt. Aus der Darstellung von $y(t)$ als Integral über eine stetige Funktion folgt dann aber sofort die stetige Differenzierbarkeit, und man erhält die Aussage durch Ableiten von (7.7).

Für $\delta > 0$ betrachten wir also den Banachraum $\mathcal{V} := C(I_\delta)$ und

$$\mathcal{D} := \{y \in \mathcal{V} : ||y - y_0||_\infty := \sup_{t \in I_\delta} ||y(t) - y_0|| \leq \epsilon\}.$$

Bezüglich der Sup-Norm $||\cdot||_\infty$ ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ eine abgeschlossene Menge (Beweis zur Übung). Man beachte, daß hier mit $||\cdot||$ eine Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ gemeint ist, mit $||\cdot||_\infty$ aber die entsprechenden Norm im Raum der stetigen Funktionen auf I_δ.

Wir überprüfen jetzt die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

1. $G(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$: Sei $y \in \mathcal{D}$. Zu zeigen ist: $Gy \in D$.
   $Gy \in \mathcal{V}$ ist klar, da mit $y(t)$ sicher auch $(Gy)(t)$ stetig auf I_δ ist. Für $t \in I_\delta$ gilt:

$$\begin{aligned} ||(Gy)(t) - y_0|| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right\| \leq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} ||f(s, y(s))||ds \\ &\leq 2\delta \cdot \sup\{||f(t, y)|| \ : \ t \in I_\delta, ||y - y_0|| \leq \epsilon\} \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

falls δ hinreichend klein ist, da f in beiden Variablen stetig ist. Wir haben also gezeigt, daß $Gy \in \mathcal{D}$, falls $\delta > 0$ hinreichend klein ist, also falls z.B. $\delta \leq \delta_1$ für ein $\delta_1 > 0$.

2. G ist auf $\mathcal{D}$ kontrahierend: Wir müssen zeigen, daß ein $q \in [0, 1)$ existiert, so daß

$$\|Gy_1 - Gy_2\|_\infty \leq q\|y_1 - y_2\|_\infty$$

für alle $y_1, y_2 \in \mathcal{D}$. Für $0 < \delta < \epsilon$, $t \in I_\delta$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|(Gy_1)(t) - (Gy_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} L \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\|, \\
&\text{(denn } |t - t_0| \leq \epsilon \text{ , } \|y_1(s) - y_0\| \leq \epsilon\text{, } \|y_2(s) - y_0\| \leq \epsilon) \\
&\leq 2\delta L \sup_{t \in I_\delta} \|y_1(t) - y_2(t)\| \\
&= 2\delta L \|y_1 - y_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\sup_{t \in I_\delta} \|(Gy_1)(t) - (Gy_2)(t)\| = \|Gy_1 - Gy_2\|_\infty \leq 2\delta L\|y_1 - y_2\|_\infty .$$

Für δ hinreichend klein, also etwa $\delta \leq \delta_2 < \epsilon$ mit $2\delta_2 L := q < 1$, ist G folglich kontrahierend.

Für $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ erhält man beide Bedingungen 1. und 2., also nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine eindeutige Funktion $y \in \mathcal{V}$ als Lösung von (7.7). □

Bemerkung:

1. Der Satz liefert die lokale Existenz und Eindeutigkeit von $y(t)$ in einem Intervall $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Falls f in einer Umgebung von $(t_0 \pm \delta, y(t_0 \pm \delta))$ dieselben Eigenschaften wie um (t_0, y_0) hat, kann man den Definitionsbereich von $y(x)$ durch nochmalige Anwendung des Satzes nach links und rechts erweitern. Durch wiederholte Anwendung kann man so zeigen, daß es ein maximales Existenzintervall $(t_{-\infty}, t_\infty)$ von $y(t)$ gibt mit $-\infty \leq t_{-\infty} < t_0 < t_\infty \leq \infty$.

2. Die Voraussetzungen des Satzes an f sind z.B. dann erfüllt, wenn $f(t, y)$ für $|t-t_0| \leq \epsilon$, $\|y - y_0\| \leq \epsilon$ stetig partiell diff'bar ist. Für den Fall $n = 1$ ist der Beweis hierzu

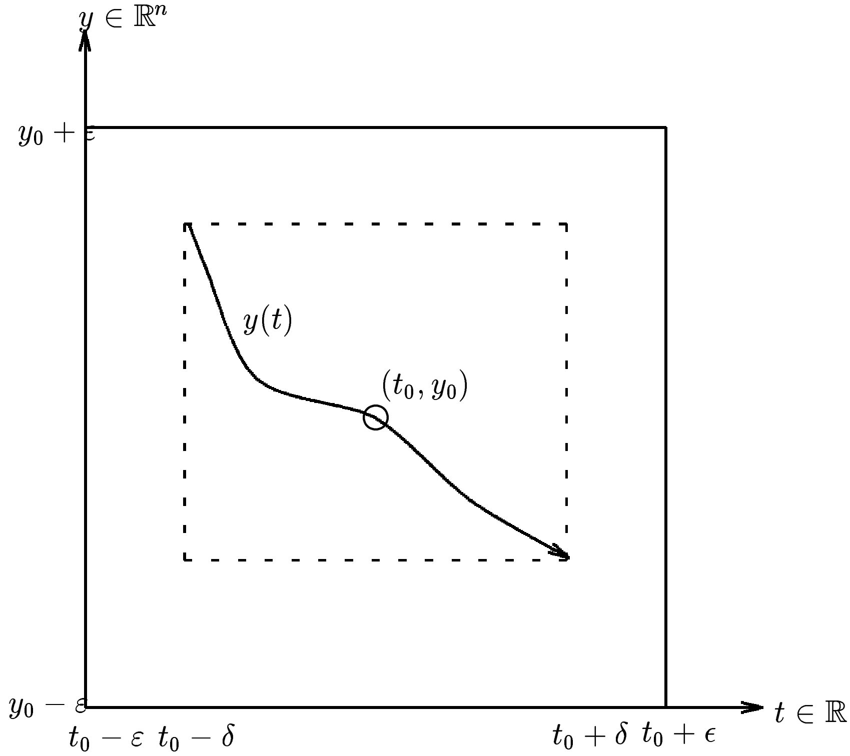

Abbildung 7.3: Veranschaulichung der lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf

einfach, denn in diesem Fall gibt es nach dem Mittelwertsatz zu jedem $t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| \leq \epsilon$, $|y_1 - y_0| \leq \epsilon$, $|y_2 - y_0| \leq \epsilon$ ein η mit $|\eta - y_0| \leq \epsilon$ und

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \eta)(y_1 - y_2).$$

Aus der Beschränktheit der partiellen Ableitung auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ folgt nun die Behauptung direkt durch einfaches Abschätzen (vgl. dazu Satz 5.2 auf Seite 50).

3. Auf die Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit von f kann nicht verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Funktion $f(t, y) = 2\sqrt{y}$ ist um $(t_0, y_0) = (0, 0)$ nicht lokal Lipschitz-stetig (der einfache Beweis dazu benutzt die Tatsache, daß die Ableitung der Wurzel im Nullpunkt eine Singularität hat). Das AWP $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ hat die Lösungen $y(t) = 0$ und $y(t) = t^2$, das Problem ist also nicht *eindeutig* lösbar.

Beispiel: Wir wollen die Lösung des AWP $y' = y^2$, $y(0) = 1$ in einem maximalen Intervall finden. Offensichtlich ist die rechte Seite $f(t, y) = y^2$ überall stetig partiell diff'bar, so daß die Voraussetzungen für Satz 7.1 erfüllt sind. Wir wissen also, daß das AWP eine (zunächst lokal um den Anfangswert $(0, 1)$) eindeutige Lösung besitzt. Diese bestimmen wir nun wie folgt durch Division durch y^2 (wegen $y(0) = 1$ ist $y^2 \neq 0$ in einer Umgebung von $t_0 = 0$) und Integration beider Seiten der DGL von 0 bis t:

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}\, ds = \int_0^t -\frac{d}{ds}\frac{1}{y(s)}\, ds = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t,$$

woraus wir

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

als Lösung unseres AWP erhalten. y hat eine Polstelle bei $t = 1$. Der maximale Existenzbereich, welcher t_0 enthält, ist also $(t_{-\infty}, t_\infty) = (-\infty, 1)$. (Dies folgt aber nicht direkt aus Satz 7.1. Vielmehr haben wir diese Tatsache durch direkte analytische Berechnung der Lösung gewonnen). Der Teil der Funktion $1/(1-t)$ für $t > 1$ ist ebenfalls eine Lösung der DGL $y' = y^2$, ist aber nicht mehr Teil der Lösung des AWP.

7.3 Graphische Lösungsverfahren

Im Fall $n = 1$ gibt die Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ explizit die Steigung der Tangente an die Funktion y in t vor. Zeichnet man in der (t, y)-Ebene für hinreichend viele (t, y) die durch die DGL gegebenen Steigungen ein, so erhält man das *Richtungsfeld* der DGL. Mit seiner Hilfe kann man den Graphen der Lösung eines AWP grob skizzieren, indem man sich, beginnend bei dem Anfangswert (t_0, y_0), beim Zeichnen einfach durch die Steigungen „leiten“ läßt. Abb. 7.4 zeigt das Richtungsfeld und die Lösung des AWP $y'(t) = -\sin(t)y(t)^2$, $y(0) = 2$, dessen exakte Lösung $y(t) = 2/(2\cos(t) - 3)$ ist.

7.4 Lineare Mehrschrittverfahren für das Anfangswertproblem

Der Standardliteratur über numerische Verfahren für DGL folgend, bezeichnen wir ab jetzt die unabhängige Variable mit x anstatt mit t. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß für den Anfangswert $x_0 = 0$ gilt, denn das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

ist mit $z(x) := y(x - x_0)$ und $\tilde{f}(x, z) := f(x - x_0, z)$ äquivalent zum AWP

$$z'(x) = y'(x - x_0) = f(x - x_0, y(x - x_0)) = \tilde{f}(x, z(x)), \quad z(0) = y_0.$$

Das Problem wird also nur horizontal um x_0 verschoben. Das Problem, welches wir betrachten, ist also das AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0. \tag{7.8}$$

Bei Differenzenverfahren zur numerischen Lösung von (7.8) berechnet man näherungsweise Funktionswerte der gesuchten Funktion $y(x)$ an diskreten Stützstellen $0 = x_0 <$

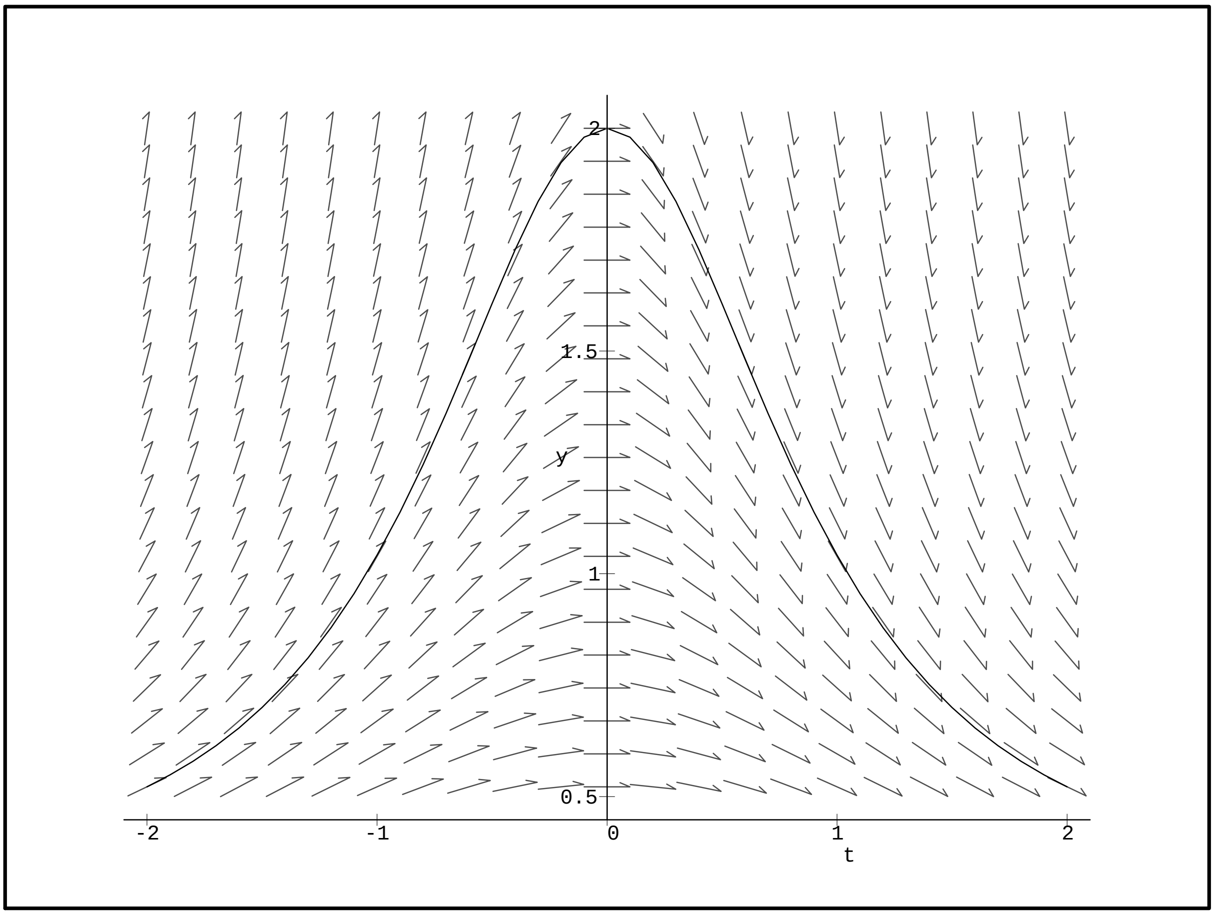

Abbildung 7.4: Richtungsfeld der DGL $y'(t) = -\sin(t)y(t)^2$ im Bereich $-2 \leq t \leq 2$, $0.5 \leq y \leq 2$. Lösung der DGL zum Anfangswert $y(0) = 2$.

$x_1 < x_2 < \ldots$. Wir nehmen hier zur Vereinfachung an, daß die x_k äquidistant sind, also von der Form $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $h > 0$ die Schrittweite des Verfahrens ist. Weiter sei $y_k \simeq y(x_k)$ der Näherungswert von $y(x)$ an der Stelle $x = x_k$, der durch ein solches Verfahren berechnet wird. y_k hängt neben k natürlich auch von der Schrittweite h ab, es wird deshalb manchmal nötig sein, diese Abhängigkeit noch durch einen zusätzlichen Index herauszustellen: $y_k = y_k^{(h)}$. Außerdem definieren wir noch zur Abkürzung $f_k := f(x_k, y_k)$.

Lösungen eines Differenzenverfahrens sind also nicht „richtige“ Funktionen, sondern diskrete Funktionswerte $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$. Für kleine Schrittweiten, d.h. wenn die x_k sehr nahe beieinander liegen, ergibt sich aus den Punkten (x_k, y_k) näherungsweise das Bild des Funktionsgraphen der Lösung $y(x)$ (falls das Verfahren konvergiert!).

Das Euler-Verfahren

Das einfachste aller Differenzenverfahren, das klassische *Euler-Verfahren*, erhält man durch Ersetzen der Ableitung $y'(x)$ durch einen Differenzenquotienten:

$$y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h),$$

also für $x = x_k$:

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y(x_k)) + O(h).$$

Als Näherung ersetzen wir nun überall $y(x_k)$ durch y_k und vernachlässigen den lokalen Diskretisierungsfehler $O(h)$:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) \Leftrightarrow y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + hf_k. \tag{7.9}$$

Offensichtlich läßt sich durch diese Iterationsvorschrift bei gegebenem y_k der neue Wert y_{k+1} ***explizit*** berechnen. Da der Anfangswert $y_0 = y(0)$ durch das AWP vorgegeben ist, definiert (7.9) eindeutig eine Folge von Näherungen $y_1 \simeq y(h)$, $y_2 \simeq y(2h)$, usw. Das Verfahren besitzt die lokale Fehlerordnung $O(h)$, weil die exakte Lösung $y(x)$ die Differenzengleichung (7.9) mit einem Fehler $O(h)$ erfüllt.

Ein ähnliches Verfahren läßt aus der Tatsache herleiten, daß der Differenzenquotient nicht nur $y'(x)$, sondern auch $y'(x+h)$ mit einem Fehler von $O(h)$ approximiert, also

$$y'(x+h) = f(x+h, y(x+h)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h).$$

Analog wie oben erhalten wir das Verfahren

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_{k+1}, y_{k+1}) \Leftrightarrow y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + hf_{k+1}. \tag{7.10}$$

Dies ist das *implizite* Eulerverfahren. Anders als in der obigen expliziten Version läßt sich y_{k+1} aus y_k nicht direkt bestimmen: Der zu bestimmende neue Wert y_{k+1} kommt in der rechten Seite in f vor; wenn f nichtlinear in y ist, dann ist entsprechend (7.10) eine nichtlineare Gleichung für y_{k+1}, die z.B. mit den Iterationverfahren aus Kap. 5 numerisch gelöst werden kann. Dies mag auf den ersten Blick als ein gravierender Nachteil erscheinen. Andererseits hat man mit y_k schon einen sehr guten Nöherungswert für y_{k+1}, sodaß (7.10) oft schon mit nur ein oder zwei Schritten z.B. mit Fixpunktiteration hinreichend genau gelöst werden kann. Außerdem besitzt (7.10) gegenüber (7.9) einige wesentliche Vorteile, was die numerische Stabilität betrifft. In der Praxis werden implizite Verfahren oft verwendet.

Beispiel: Wir betrachten das AWP $y' = y$, $y(0) = 1$. Die Iterationsvorschrift des expliziten Verfahrens (7.9) ist hier $y_0 = 1$, $y_{k+1} = y_k + hy_k = (1+h)y_k$, woraus direkt $y_k = (1+h)^k$

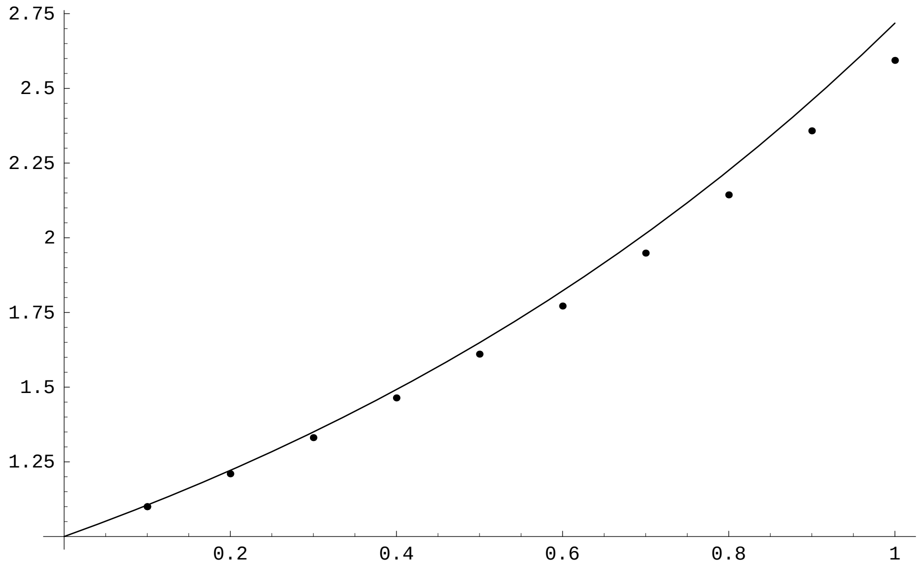

Abbildung 7.5: Numerische Lösung des AWP $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$ mit dem klassischen expliziten Eulerverfahren, Schrittweite $h = 0.1$, im Bereich $0 \leq x \leq 1$

folgt. Abb. 7.5 zeigt die exakte Lösung $y(x) = e^x$ und die ersten 10 Iterationen y_k für $h = 0.1$ im Bereich $0 \leq x \leq 1$. Man sieht, daß der absolute Fehler für wachsende k immer größer wird. Dies ist ein typisches Problem bei Differenzenverfahren für AWPe: Da der lokale Diskretisierungsfehler $O(h)$ in jedem Schritt begangen wird, entfernt sich die numerische Lösung y_k in jedem Schritt ein Stückchen weiter von der exakten Lösungskurve. Um diesen Effekt abzuschwächen, muß man entweder h kleiner wählen, also bei gleichbleibendem Lösungsintervall die Anzahl der Schritte erhöhen, oder eine Formel mit einer besseren Fehlerordnung als nur $O(h)$ verwenden.

Die Verfahren von Adams-Bashforth

Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Fehlerordnung besteht darin, zur Berechnung eines neuen Funktionswertes von $y(x)$ nicht nur den zuletzt berechneten Wert, sondern auch noch ältere, in vor-vorherigen Schritten berechnete Werte zu verwenden. Seien also für ein $r \in \mathbb{N}$ die r Werte $y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+r-1}$ gegeben. Wir wollen alle diese zur Berechnung des neuen, noch unbekannten Wertes y_{k+r} verwenden. Dazu integrieren wir (7.8) wie folgt:

$$y(x_{k+r}) = y(x_{k+r-1}) + \int_{x_{k+r-1}}^{x_{k+r}} f(x, y(x))\, dx.$$

Die Idee bei den Verfahren von Adams-Bashforth besteht nun darin, die $y(x_i)$ durch y_i und den Integranden $f(x, y(x))$ durch das eindeutige Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_{r-1}$ mit

$$p(x_i) = f_i \simeq f(x_i, y(x_i)), \quad i = k, \ldots, k + r - 1 \tag{7.11}$$

zu ersetzen. Der in das Intervall $[x_{k+r-1}, x_{k+r}]$ „überhängende“ Teil von $p(x)$ wird also anstelle von $f(x, y(x))$ integriert, siehe Abb. 7.6. Achtung: Es werden die $f_k = f(x_k, y_k)$

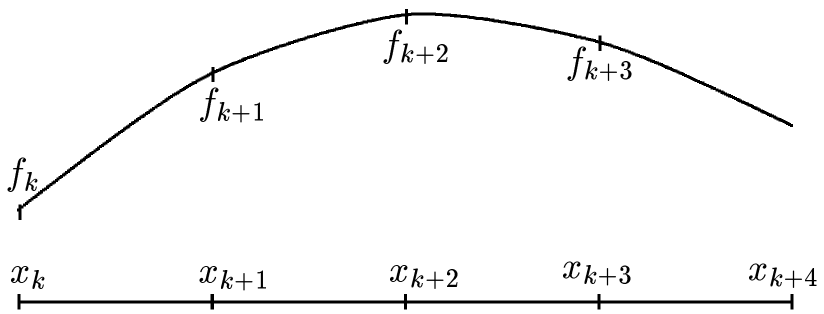

Abbildung 7.6: Idee des Verfahrens von Adams-Bashforth für $r = 4$

r	b_0	b_1	b_2	b_3
1	1			
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		
3	$\frac{5}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{23}{12}$	
4	$-\frac{3}{8}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$

Tabelle 7.1: Die Koeffizienten des Verfahrens von Adams-Bashforth für $r \leq 4$

interpoliert, *nicht* die y_k!

Ähnlich wie bei den Integrationsformeln von Newton-Cotes können wir nun das Verfahren herleiten:

$$\begin{aligned}
y_{k+r} &= y_{k+r-1} + \int_{x_{k+r-1}}^{x_{k+r}} p(x)\, dx \\
&= y_{k+r-1} + \int_{x_{k+r-1}}^{x_{k+r}} \sum_{i=k}^{k+r-1} f_i \prod_{j=k,j\neq i}^{k+r-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx \quad \text{(Formel von Lagrange)} \\
&= y_{k+r-1} + \sum_{i=k}^{k+r-1} f_i \int_{x_{k+r-1}}^{x_{k+r}} \prod_{j=k,j\neq i}^{k+r-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx \\
&= y_{k+r-1} + h \sum_{i=k}^{k+r-1} f_i \int_0^1 \prod_{j=k,j\neq i}^{k+r-1} \frac{k + r - 1 + \xi - j}{i - j}\, d\xi \quad (x = x_{k+r-1} + \xi h) \\
&= y_{k+r-1} + h \sum_{i=0}^{r-1} f_{k+i} \int_0^1 \prod_{j=0,j\neq i}^{r-1} \frac{r - 1 + \xi - j}{i - j}\, d\xi \quad \text{(Indexverschiebung)} \\
&:= y_{k+r-1} + h \sum_{i=0}^{r-1} b_i f_{k+i}.
\end{aligned}$$

Die Integrale $b_i = \int_0^1 \cdots \, d\xi$ sind die Koeffizienten der Formel und hängen neben i nur noch von r ab. Sie sind elementar (wenn auch mühselig) auswertbar. In Tabelle 7.1 sind die Werte von b_i für $r \leq 4$ aufgelistet.

Für $r = 1$ erhält man einfach das explizite Eulerverfahren (7.9). Für $r = 2$ lautet das Verfahren ausgeschrieben

$$y_{k+2} = y_{k+1} + \frac{h}{2}(-f_k + 3f_{k+1}). \tag{7.12}$$

Bei gegebenem y_k, y_{k+1} ist dies eine explizite Formel zur Berechnung von y_{k+2}. Das Verfahren ist ein 2-Schrittverfahren, weil die letzten beiden zuvor berechneten Werte zur Berechnung des neuen Wertes verwendet werden.

Bemerkung:

1. Mehrschrittverfahren besitzen einen offensichtlichen prinzipiellen Nachteil: Es werden immer die letzten r Werte zur Berechnung des neuen Wertes benötigt. Beim Start des Verfahrens, für $k = 0$, benötigt man also $y_0, y_1, \ldots y_{r-1}$ zur Berechnung von y_r. Durch das AWP ist aber nur y_0 vorgegeben. Die fehlenden Startwerte $y_1, \ldots y_{r-1}$ muß man sich auf andere Weise beschaffen, z.B. durch ein Einschrittverfahren der Ordnung $O(h)$, für das die Schrittweite h sehr klein gewählt werden muß, damit die $y_1, \ldots y_{r-1}$ hinreichend genau berechnet werden.

2. Die Verfahren von *Adams-Moulton* bilden das implizite Gegenstück zu den Adams-Bashforth-Verfahren. Man leitet sie in analoger Weise her, indem man anstatt (7.11) das entsprechende Polynom $p \in \mathcal{P}_r$ mit

$$p(x_i) = f_i \simeq f(x_i, y(x_i)), \quad i = k, \ldots, k+r \tag{7.13}$$

nimmt. Auf diese Weise tritt auch der unbekannte Wert y_{k+r} in der rechten Seite in $f_{k+r} = f(x_{k+r}, y_{k+r})$ auf.

3. Es läßt sich allgemein zeigen, daß das r-Schritt-Verfahren von Adams-Bashforth den lokalen Diskretisierungsfehler $O(h^r)$ besitzt, siehe unten.

Allgemeine Lineare Mehrschrittverfahren

Die naheliegende Idee, auch die „alten" Werte $y_k, \ldots, y_{k+r-1}$ ***direkt***, d.h. nicht nur als Argumente von f, zur Konstruktion einer Formel zu benutzen, führt auf das allgemeine Mehrschrittverfahren (MSV)

$$\sum_{i=0}^{r} a_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{r} b_i f_{k+i}, \quad a_r \neq 0 \tag{7.14}$$

zur Bestimmung von y_{k+r} bei gegebenen $y_k, \ldots, y_{k+r-1}$. Ohne Einschränkung können wir $a_r = 1$ annehmen (ansonsten dividiere durch a_r). Für $b_r = 0$ ist das Verfahren explizit (weil dann f_{k+r} und damit y_{k+r} in der rechten Seite von (7.14) nicht vorkommt), ansonsten implizit. Die Verfahren von Adams-Bashforth fallen offenbar in diese Klasse von

Verfahren. So gilt z.B. für das spezielle Verfahren (7.12) $r = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_0 = -1/2$, $b_1 = 3/2$, $b_2 = 0$. Für das explizite Eulerverfahren (7.9) gilt $r = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$.

Die Koeffizienten a_i, b_i sind nun so zu bestimmen, daß das Verfahren eine möglichst hohe Fehlerordnung erreicht. Dazu definieren wir zunächst den Begriff des lokalen Diskretisierungsfehlers.
Grob formuliert hat ein MSV (7.14) die Fehlerordnung $O(h^p)$, wenn jede Lösung $y(x)$ einer DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ die Differenzengleichung (7.14) mit einem Fehler von (höchstens) $O(h^p)$ erfüllt, wenn man für x_k ein beliebiges x einsetzt. Die Bedingung lautet also

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{r} a_i y(x+ih) = \sum_{i=0}^{r} b_i f(x+ih, y(x+ih)) + O(h^p).$$

Das Eulerverfahren erfüllt z.B. diese Bedingung mit $p = 1$, wie zu erwarten war. Unter Ausnutzung der DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ selber erhalten wir daraus die folgende

Definition 7.1 (Lokaler Diskretisierungsfehler, Konsistenzordnung) *Das Verfahren (7.14) besitzt den lokalen Diskretisierungsfehler $O(h^p)$, falls*

$$\sum_{i=0}^{r} a_i y(x+ih) - h\sum_{i=0}^{r} b_i y'(x+ih) = O(h^{p+1}) \tag{7.15}$$

für jede $(r+1)$ mal differenzierbare Funktion $y(x)$.

Bemerkung:

1. Man sagt in diesem Fall, daß das Verfahren *konsistent von der Ordung p* ist bzw. die *Konsistenzordnung p* hat. Ein Verfahren mit der Konsistenzordnung von (mindestens) 1 heißt einfach *konsistent.*

2. Die lokale Konsistenz- oder Fehlerordnung ist nicht zu verwechseln mit der Größe des absoluten Fehlers, mit dem die numerische Lösung eines AWP, die man mit einem MSV erhält, behaftet ist! Sie sagt im Prinzip nur aus, wie gut die Lösung einer beliebigen *Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ die *Differenzengleichung* (7.14) erfüllt. Als Beispiel betrachte man wieder Abb. 7.4. Während der lokale Diskretisierungsfehler des Eulerverfahrens generell $O(h)$ ist, wächst der absolute Fehler der durch das Verfahren erzeugten Folge $y_k = (1 + h)^k$ für wachsende k hier kontinuierlich an.

(7.15) ist für gegebene Verfahren leicht mit Entwicklung der $y(x + ih)$, $y'(x + ih)$ in einer Taylorreihe um x zu überprüfen. An dieser Stelle benötigt man die $(r + 1)$-malige Differenzierbarkeit von y in der Definition.

Beispiel: Wir wollen zeigen, daß das 2-Schrittverfahren (7.12) von Adams-Bashforth die Konsistenzordnung 2 hat. Wir müssen also zeigen, daß

$$e(h) := -y(x+h) + y(x+2h) - \frac{h}{2}[-y'(x) + 3y'(x+h)] = O(h^3).$$

Mit Taylorentwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4), \\ y(x+2h) &= y(x) + 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + \frac{8h^3}{6}y'''(x) + O(h^4), \\ y'(x+h) &= y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + O(h^4). \end{aligned}$$

(Dabei haben wir um eine Potenz von h mehr entwickelt, als notwendig gewesen wäre; wir benötigen dieses Ergebnis noch weiter unten.) Wir ersetzen jetzt die Terme in $e(h)$ durch diese Formeln und fassen Terme gleicher Potenzen in h zusammen. Das ergibt

$$e(h) = y(x)(-1+1) + hy'(x)\left(-1 + 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) + h^2y''(x)\left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2}\right) + O(h^3) = O(h^3).$$

Umgekehrt kann man versuchen, die a_i und b_i bei gegebenem r so bestimmen, daß das Verfahren eine bestimmte Konsistenzordnung hat:

Beispiel: Wir wollen ein explizites Zweischrittverfahren

$$a_0y_k + a_1y_{k+1} + y_{k+2} = h[b_0f_k + b_1f_{k+1}]$$

der Ordnung $p = 3$ konstruieren. Nach der Definition muß also

$$e(h) = a_0y(x) + a_1y(x+h) + y(x+2h) - h[b_0y'(x) + b_1y'(x+h)] = O(h^4)$$

gelten. Mit der oben durchgeführten Taylorentwicklung erhalten wir

$$e(h) = y(x)(a_0+a_1+1) + hy'(x)(a_1+2-b_0-b_1) + \frac{h^2}{2}y''(x)(a_1+4-2b_1) + \frac{h^3}{6}y'''(x)(a_1+8-3b_1) + O(h^4).$$

Damit $e(h) = O(h^4)$ gilt, müssen also die Koeffizienten der niedrigen Potenzen von h verschwinden, d.h. es muß gelten

$$a_0 + a_1 = -1, \quad a_1 - b_0 - b_1 = -2, \quad a_1 - 2b_1 = -4, \quad a_1 - 3b_1 = -8.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a_0 = -5$, $a_1 = 4$, $b_0 = 2$, $b_1 = 4$. Das gesuchte Verfahren lautet also

$$y_{k+2} = 5y_k - 4y_{k+1} + h(2f_k + 4f_{k+1}). \tag{7.16}$$

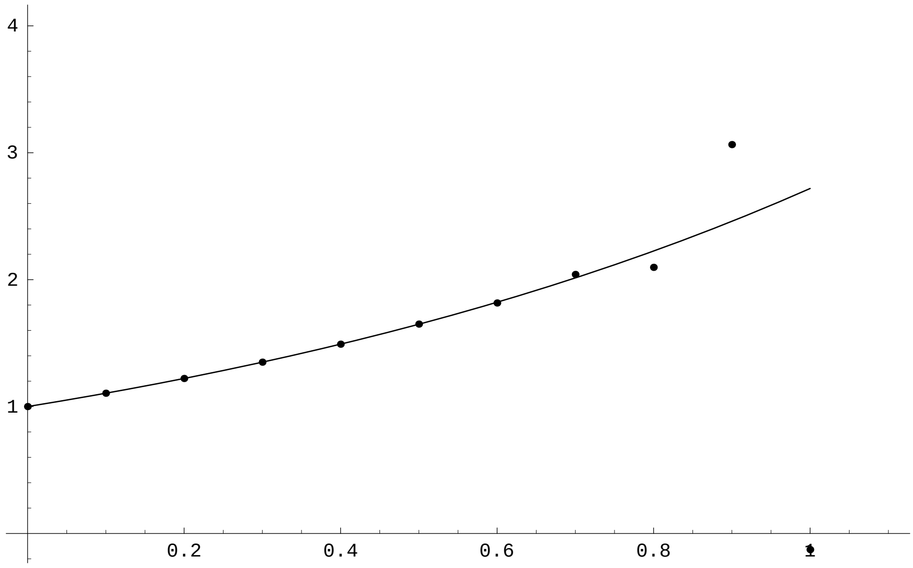

Abbildung 7.7: Numerische Lösung des AWP $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$ mit dem Verfahren (7.16), Schrittweite $h = 0.1$, im Bereich $0 \leq x \leq 1$

Wir testen dieses Verfahren gleich an unserem Modellproblem $y' = y$, $y(0) = 1$. Dabei nehmen wir zur Vereinfachung für y_1 den exakten Wert $y(h) = e^h$. Für $h = 0.1$ erhalten wir die in Abb. 7.7 berechneten Werte y_k. Offensicht sind die y_k für $k \leq 6$ sehr genau, sie sind mit bloßem Auge nicht von den exakten Funktionswerten zu unterscheiden (was angesichts der guten Konsistenzordnung 3 durchaus zu erwarten war). y_7 ist schon mit einem kleinen sichtbaren Fehler behaftet. Für $k \geq 8$ wachsen die Fehler plötzlich sehr schnell an (und zwar viel schneller, als es z.B. bei der Berechnung mit dem Euler-Verfahren der Fall war, welches nur von erster Ordnung in h ist!), und die y_k haben offensichtlich nichts mehr mit der exakten Lösung zu tun.
Offensichtlich geht dem Verfahren (7.16) eine wichtige Eigenschaft ab, die wir bislang noch nicht untersucht haben, nämlich die *Stabilität*.