Kapitel 3

Interpolation mit Polynomen

3.1 Einleitung

Gegeben sei eine Menge von $n+1$ reellen Datenpaaren

$$\mathcal{G} := \{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

wobei alle x_i, $i = 0, \ldots, n$, paarweise verschieden sind. Es wird angenommen, daß die (x_i, y_i) Punkte auf dem Graphen einer stetigen Funktion $y(x)$ sind (was bei vielen praktischen Anwendungen der Fall ist). Sei $x_{\min} = \min_i\{x_i\}$ und $x_{\max} = \max_i\{x_i\}$, wie bestimmt man einen Näherungswert von y an beliebigen Zwischenstellen $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$?

Ansatz: *Interpolation* der Punkte in $\mathcal{G}$ durch eine „glatte" Funktion $p(x)$ mit $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, und Approximation von $y(x)$ für $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ durch $p(x)$. Man sagt dann, p ist die *Interpolierende* zu den Daten $\mathcal{G}$. Es ist naheliegend, als einfache Klasse von „glatten" Funktionen

$$p \in \mathcal{P}_n := \{ \text{ Polynome vom Grad } \leq n\}$$

zu nehmen.

Beispiel: An einem Sommertag werden zu den Uhrzeiten 0, 3, 6, 9 und 12 Uhr die Temperaturen 15, 13, 14, 19 und 23 Grad Celsius gemessen. Gesucht ist ein Näherungswert der Temperatur um 10 Uhr. Da man annehmen kann, daß die Temperatur stetig von der Zeit abhängt, macht der Interpolationsansatz hier Sinn. Abbildung 3.1 zeigt das (wie wir zeigen werden) eindeutig bestimmte Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_4$ zu den obigen Daten. Für 10 Uhr erhalten wir hieraus eine Temperatur von etwa 20 Grad.

Wie berechnet man nun das Interpolationspolynom?

3.2 Die Interpolationsformel von Lagrange

Zur Berechnung von p ist es naheliegend, den Ansatz $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ zu machen und für die a_i aus den $n+1$ Bedingungen $p(x_i) = y_i$ ein lineares Gleichungssystem aufzustellen.

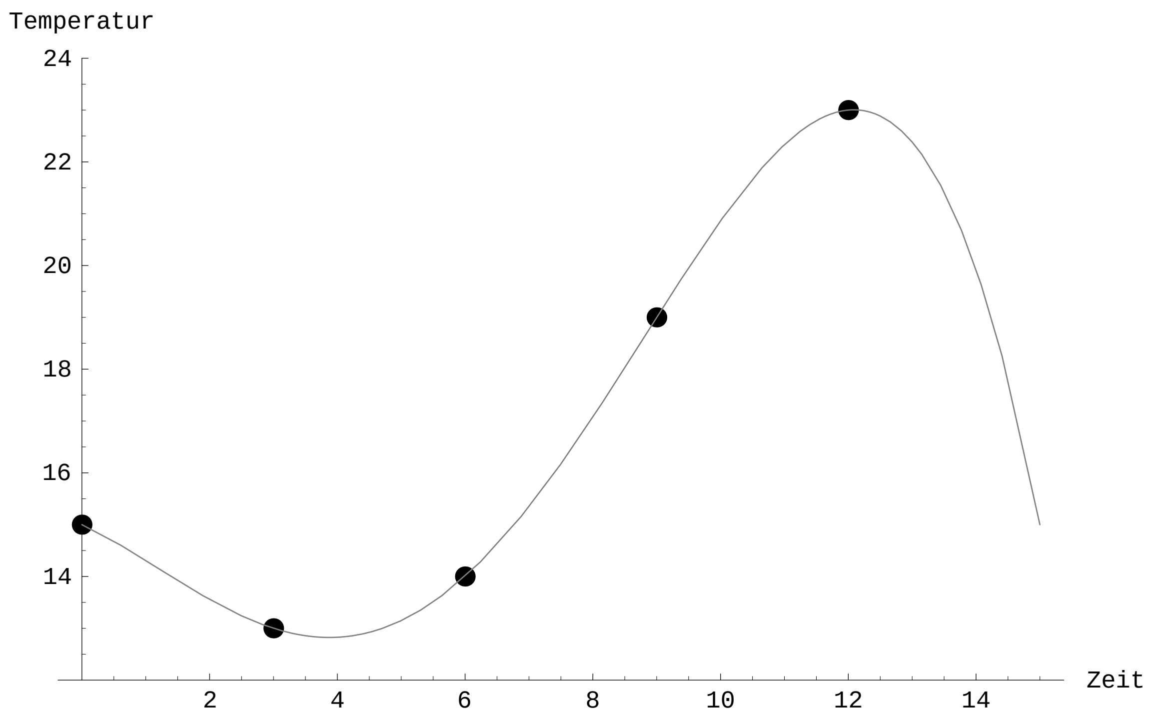

Abbildung 3.1: Interpolationspolynom zu den Daten $\mathcal{G} = \{(0, 15), (3, 13), (6, 14), (9, 19), (12, 23)\}$.

Eleganter und für viele Zwecke geeigneter ist aber folgender Ansatz: Wir bestimmen zunächst eine kanonische Basis, d.h. $n + 1$ Polynome $L_0, \ldots, L_n \in \mathcal{P}_n$ mit $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Offensichtlich ist dann $\sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$ eine Lösung unseres Interpolationsproblems.

Satz 3.1 (Formel von Lagrange) *Das eindeutige Polynom $p \in \mathcal{P}_n$, welches $\mathcal{G}$ interpoliert, ist gegeben durch*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \quad \textit{mit } L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Beweis: Man überlegt sich leicht, daß $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ gilt und daraus $p(x_i) = y_i$ folgt $(i, j = 0, \ldots, n)$. Zum Beweis der Eindeutigkeit nimmt man an, es gäbe ein weiteres Polynom $\bar{p} \in \mathcal{P}_n$ mit $\bar{p}(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$. Dann ist $p - \bar{p}$ auch aus $\mathcal{P}_n$ und verschwindet an den $n + 1$ Stellen $x_0, \ldots, x_n$. Da ein von Null verschiedenes Polynom n-ten Grades aber höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen haben kann, folgt daraus, daß $p - \bar{p}$ identisch Null ist. $\square$

Beispiel: Interpolation der Daten $\mathcal{G} = \{(0, 1), (1, 3), (3, 2)\}$. Vorgegebene Werte:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	3	2

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-3) \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{1}{2}x(x-3) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{6}x(x-1) \\
p(x) &= 1 \cdot L_0(x) + 3 \cdot L_1(x) + 2 \cdot L_2(x) \\
&= \frac{1}{3}(x-1)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-3) + \frac{1}{3}x(x-1) \\
&= -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1.
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

1. Man würde erwarten, daß das Interpolationspolynom invariant gegenüber Permutationen der Daten in $\mathcal{G}$ ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall. Man kann so z.B. ohne Einschränkung annehmen, daß $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

2. Das Interpolationspolynom kann auch zur Annäherung von Werten $y(x)$ für $x \notin [x_{\min}, x_{\max}]$ benutzt werden. In diesem Fall spricht man von *Extrapolation*. Allerdings ist hier zu berücksichtigen, daß $p'(x)$ für solche x, die sich „weit" außerhalb von $[x_{\min}, x_{\max}]$ befinden, oft sehr groß ist und man so möglicherweise unrealistische Daten bekommt. So erhielte man z.B für obiges Problem, wie aus Abb. 3.1 ersichtlich ist, um 15 Uhr nachmittags eine Temperatur von etwa 15 Grad. Eine so starke Abkühlung findet aber gewöhnlich (außer bei Gewittern) nachmittags nicht statt.

3. In der Praxis werden oft auch andere Funktionsklassen zur Interpolation benutzt, z.B. gebrochen rationale Funktionen oder stückweise Polynome, sogenannte *Splines*.

4. Man könnte auch versuchen, y durch ein Polynom von kleineren Graden als n zu approximieren. In diesem Fall hat man mehr Bedingungen als Basisfunktionen, das Problem ist überbestimmt, und man wird i.A. nicht erreichen können, daß $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Eine Möglichkeit ist hier z.B., die Daten durch eine Kurve derart zu approximieren, daß die Summe der Quadrate der Abstände der Punkte zur Kurve zwar nicht Null, aber minimal wird. Für $p \in \mathcal{P}_1$ ist dies z.B. das Problem der linearen Regression.

Die Interpolationsformel von Lagrange ist theoretisch sehr wichtig und wird z.B. bei der Herleitung von Integrationsformeln benutzt. Zur Berechnung eines konkreten Interpolationspolynoms ist die Formel von Lagrange aber nicht sehr effizient: In der Praxis möchte man z.B. häufig ein vorhandenes Interpolationspolynom durch Hinzunahme weiterer Stützstellen verbessern. Die Lagrange-Methode ist hierfür nicht geeignet, da man bei neu hinzukommenden Stützstellen mit der Rechnung von vorn beginnen muß. Dies ist bei den zwei folgenden Methoden nicht der Fall.

3.3 Die Rekursionsformel von Neville

Definition 3.1 *Bei gegebenem $\mathcal{G} = \{(x_0, y_0) \ldots, (x_n, y_n)\}$ und $0 \le i \le k \le n$ bezeichnet $p_{i,i+1,\ldots,k}$ dasjenige Polynom aus $\mathcal{P}_{k-i}$, das an den Stellen $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$ die Werte $y_i, y_{i+1}, \ldots, y_k$ annimmt.*

Für paarweise verschiedene $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$ ist $p_{i,\ldots,k}$ nach Satz 3.1 eindeutig bestimmt. $p_{0,\ldots,n}$ ist natürlich das Interpolationspolynom zu $\mathcal{G}$.

Satz 3.2 (Rekursionsformel von Neville) *Seien $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k$ paarweise verschieden. Dann gilt für $k > i$:*

$$p_{i,\ldots,k}(x) = \frac{1}{x_k - x_i}\left[(x - x_i)p_{i+1,\ldots,k}(x) + (x_k - x)p_{i,\ldots,k-1}(x)\right]. \tag{3.1}$$

Beweis: Es sei $\bar{p}$ das Polynom auf der rechten Seite von (3.1). Offensichtlich ist $\bar{p} \in \mathcal{P}_{k-i}$. Wir müssen zeigen, daß $\bar{p}(x_j) = y_j$ für $j = i, \ldots, k$, dann gilt wegen der Eindeutigkeit $\bar{p} = p_{i,\ldots,k}$.

$$\begin{aligned}
\bar{p}(x_i) &= p_{i,\ldots,k-1}(x_i) = y_i \\
\bar{p}(x_k) &= p_{i+1,\ldots,k}(x_k) = y_k \\
\bar{p}(x_j) &= \frac{1}{x_k - x_i}\left[(x_j - x_i)p_{i+1,\ldots,k}(x_j) + (x_k - x_j)p_{i,\ldots,k-1}(x_j)\right] \\
&= \frac{1}{x_k - x_i}[(x_j - x_i)y_j + (x_k - x_j)y_j] = y_j \text{ für } i < j < k.
\end{aligned}$$

□

(3.1) erlaubt die Berechnung des Interpolationspolynoms nach dem folgenden Schema (hier $n = 3$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_0 & y_0 & = & p_0 & & & & & \\
 & & & & \rangle & p_{0,1} & & & \\
x_1 & y_1 & = & p_1 & & & \rangle & p_{0,1,2} & \\
 & & & & \rangle & p_{1,2} & & & \rangle \; p_{0,1,2,3} \\
x_2 & y_2 & = & p_2 & & & \rangle & p_{1,2,3} & \\
 & & & & \rangle & p_{2,3} & & & \\
x_3 & y_3 & = & p_3 & & & & &
\end{array}$$

Bei Hinzunahme von weiteren Stützstellen wird das Schema einfach erweitert, ohne daß die bereits berechneten Ergebnisse ungültig werden.

Beispiel: Berechne $p_{0,1,2}(x)$ für $\mathcal{G} = \{(1,3),(3,2),(0,1)\}$.

$$\begin{array}{cclcccccc}
j & x_j & y_j & & & & & & \\
0 & 1 & p_0 = 3 & & & & & & \\
 & & & p_{0,1} & = & \frac{(x-1)2+(3-x)3}{3-1} & = & \frac{7-x}{2} & \\
1 & 3 & p_1 = 2 & & & & & & p_{0,1,2} \\
 & & & p_{1,2} & = & \frac{(x-3)1+(0-x)2}{0-3} & = & \frac{x+3}{3} & \\
2 & 0 & p_2 = 1 & & & & & &
\end{array}$$

wobei

$$p_{0,1,2} = \frac{(x-1)\cdot\frac{x+3}{3} + (0-x)\cdot\frac{7-x}{2}}{0-1} = \frac{-5x^2+17x+6}{6}.$$

Die Formel von Neville ist besonders nützlich, wenn das interpolierende Polynom an einer Stelle $\bar{x}$ ausgewertet werden soll. Die Variable x braucht dann bei der Berechnung nicht mitgeführt zu werden, und die Einträge in jeder Spalte des Schemas können sofort ausgewertet werden. Z.B. $\bar{x} = 2$ für $\mathcal{G} = \{(1,3),(3,2),(0,1)\}$:

$$\begin{array}{cccccc}
j & x_j & y_j & & & \\
0 & 1 & 3 & & & \\
 & & & \frac{(2-1)2+(3-2)3}{3-1} = \frac{5}{2} & & \\
1 & 3 & 2 & & \frac{(2-1)5/3+(0-2)5/2}{0-1} = \frac{10}{3} & \\
 & & & \frac{(2-3)1+(0-2)2}{0-3} = \frac{5}{3} & & \\
2 & 0 & 1 & & &
\end{array}$$

Die Diagonalfolge $3, 5/2, 10/3$ gibt die Approximation zu $y(\bar{x})$ bei einer zunehmenden Anzahl von Stützpunkten an. Wird der Wert von y bis zu einer bestimmten Genauigkeit gesucht, dann werden weitere Stützpunkte soweit hinzugefügt, bis die berechneten Werte mit der gewünschten Genauigkeit übereinstimmen.

3.4 Die Newtonsche Formel und dividierte Differenzen

Die Neville–Rekursion eignet sich mehr zur Auswertung des Interpolationspolynoms p an einer bestimmten Stelle als zur Berechnung von p selber. Dazu ist die Formel von Newton geeigneter. Wir benötigen zunächst den Begriff der *dividierten Differenz*, deren Definition eine formale Ähnlichkeit zur Neville-Rekursionsformel aufweist:

Definition 3.2 *Die* dividierte Differenz $[y_i \dots y_k]$ *ist für* $0 \le i \le k \le n$ *rekursiv definiert durch*

$$\begin{aligned}
[y_i] &:= y_i, \\
[y_i \dots y_k] &:= \frac{1}{x_k - x_i}\left([y_{i+1} \dots y_k] - [y_i \dots y_{k-1}]\right).
\end{aligned}$$

Z.B. ist $[y_0 y_1] = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$. Zur bequemen Berechnung der dividierten Differenzen dient, ähnlich wie bei der Neville-Formel, das Differenzenschema

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 & [y_0] & & & \\
 & & [y_0 y_1] & & \\
x_1 & [y_1] & & [y_0 y_1 y_2] & \\
 & & [y_1 y_2] & & [y_0 y_1 y_2 y_3] \\
x_2 & [y_2] & & [y_1 y_2 y_3] & \\
 & & [y_2 y_3] & & \\
x_3 & [y_3] & & &
\end{array}
$$

Beispiel: Für $\mathcal{G} = \{(0,1),(1,3),(3,2)\}$ lautet das Differenzenschema:

$$
\begin{array}{llll}
0 & 1 & & \\
 & & 2 & \\
1 & 3 & & -5/6 \\
 & & -1/2 & \\
3 & 2 & &
\end{array}
$$

Wenn wir nun p darstellen als

$$
\begin{aligned}
p(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\
&= \sum_{s=0}^{n} A_s \prod_{l=0}^{s-1} (x - x_l),
\end{aligned}
$$

dann gilt

Satz 3.3 (Formel von Newton) *Die Koeffizienten $A_0, \ldots, A_n$ lassen sich darstellen als*

$$A_i = [y_0 \ldots y_i], \quad i = 0, \ldots, n.$$

Beweis: Wir zeigen für $0 \le i \le k \le n$:

$$p_{i,\ldots,k}(x) = [y_i] + [y_i y_{i+1}](x - x_i) + \cdots + [y_i \ldots y_k](x - x_i)\ldots(x - x_{k-1})$$

durch Induktion nach $m = k - i + 1 =$ Anzahl der Stützstellen von $p_{i,\ldots,k}$.

1. $m = 1$: $p_i(x) = [y_i] = y_i$ nach Definition 3.1.

2. $m - 1 \to m$: Wir führen zunächst folgende Abkürzung ein: Für ein Polynom $p = \sum_{s=0}^{l} a_s x^s \in \mathcal{P}_l$, $l \in \mathbb{N}$, bezeichne $K(p)$ den höchsten Koeffizienten von p, also $K(p) = a_l$ falls $a_l \neq 0$. Für Polynome der Form $p(x) = \prod_s (x - x_s)$, wie sie in diesem Beweis auftreten, gilt offensichtlich $K(p) = 1$ (Ausmultiplizieren des Produkts).

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$p_{i+1,\dots,k}(x) = [y_{i+1}] + [y_{i+1}y_{i+2}](x - x_{i+1}) + \dots + [y_{i+1}\dots y_k](x - x_{i+1})\dots(x - x_{k-1}),$$
$$p_{i,\dots,k-1}(x) = [y_i] + [y_i y_{i+1}](x - x_i) + \dots + [y_i \dots y_{k-1}](x - x_i)\dots(x - x_{k-2}).$$

Hieraus folgt

$$K(p_{i+1,\dots,k}) = [y_{i+1}\dots y_k], \quad K(p_{i,\dots,k-1}) = [y_i \dots y_{k-1}]$$

und ebenso

$$K((x - x_i)p_{i+1,\dots,k}) = [y_{i+1}\dots y_k], \quad K((x_k - x)p_{i,\dots,k-1}) = -[y_i \dots y_{k-1}].$$

Nach der Rekursionsformel von Neville und der Definition der dividierten Differenzen gilt deshalb

$$K(p_{i,\dots,k}) = \frac{1}{x_k - x_i}\left([y_{i+1}\dots y_k] - [y_i \dots y_{k-1}]\right) = [y_i \dots y_k]. \tag{3.2}$$

Nun betrachten wir einmal das Polynom

$$\bar{p}(x) := p_{i,\dots,k}(x) - [y_i \dots y_k](x - x_i)\dots(x - x_{k-1}). \tag{3.3}$$

Wegen (3.2) löschen sich die führenden Koeffizienten von x^{k-i} in dieser Differenz aus, es gilt also $\bar{p} \in \mathcal{P}_{k-i-1}$. Wegen

$$\bar{p}(x_j) = p_{i,\dots,k}(x_j) = y_j, \quad j = i, \dots, k-1$$

muß $\bar{p}$ dann aber das eindeutig bestimmte Polynom sein, welches die Daten $i, \dots, k-1$ interpoliert, d.h. $\bar{p} = p_{i,\dots,k-1}$. Damit folgt aus (3.3):

$$\begin{aligned} p_{i,\dots,k}(x) &= p_{i,\dots,k-1} + [y_i \dots y_k](x - x_i)\dots(x - x_{k-1}). \\ &= [y_i] + [y_i y_{i+1}](x - x_i) + \dots + [y_i \dots y_{k-1}](x - x_i)\dots(x - x_{k-2}) \\ &\quad + [y_i \dots y_k](x - x_i)\dots(x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

□

Beispiel: Das Newton'sche Interpolationspolynom für das obige Beispiel kann direkt der obersten Diagonale des Differenzenschemas entnommen werden:

$$p(x) = 1 + 2x - 5/6x(x - 1).$$

Will man Stützpunkte hinzunehmen, so läßt sich das Schema leicht erweitern. Zu den Stützpunkten unseres Beispiels nehmen wir noch $(x_3, y_3) = (2, 4)$ hinzu und erhalten:

x_j	y_j			
0	1			
		2		
1	3		$-5/6$	
		$-1/2$		$-1/3$
3	2		$-3/2$	
		-2		
2	4			

$$p(x) = 1 + 2x - \frac{5}{6}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$$

3.5 Der Interpolationsfehler bei Polynominterpolation

Seien in einem Intervall $[a,b]$ $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \subset [a,b]$ und eine Funktion $f \in C^{n+1}[a,b]$ gegeben. Wir wollen $f(x)$ für $x \neq x_i$ approximieren.

Betrachten wir dazu das eindeutig bestimmte Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_j) = f(x_j), j = 0, \ldots, n$. Der folgende Satz ermöglicht eine Aussage über den Fehler, der bei einer Approximation von f durch p auftritt:

Satz 3.4 (Fehlerabschätzung) *1. Zu jedem $\bar{x} \in [a,b]$ existiert ein $\tilde{x} \in [a,b]$, so daß gilt:*

$$f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = w(\bar{x})\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}, \quad \textit{mit } w(x) := \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

.

2. Für den Interpolationsfehler gilt für $x \in [a,b]$

$$|f(x) - p(x)| \leq |w(x)| \cdot \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}.$$

Beweis:

1. Für $\bar{x} = x_j$, $j = 0, \ldots, n$ folgt der Satz durch Einsetzen. Für $\bar{x} \neq x_j$, $\bar{x} \in [a,b]$ setzen wir

   $$F(x) := f(x) - p(x) - Kw(x)$$

   mit einer noch zu bestimmenden Konstanten K und erhalten $F(x_j) = 0$, $j = 0, \ldots, n$.

   Wir wählen K nun so, daß auch $F(\bar{x})$ verschwindet, also

   $$K = \left(\frac{f-p}{w}\right)(\bar{x}).$$

Damit hat F in $[a,b]$ mindestens die $n+2$ Nullstellen $\bar{x}, x_0, \ldots, x_n$. Aus dem Satz von Rolle folgt, daß dann $F^{(n+1)}$ mindestens eine Nullstelle $\tilde{x}$ in $[a,b]$ besitzt.

Aus der Beziehung

$$F^{(n+1)}(\tilde{x}) = f^{(n+1)}(\tilde{x}) - K(n+1)! = 0$$

folgt

$$K = \left(\frac{f-p}{w}\right)(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!},$$

also:

$$f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = w(\bar{x})\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}.$$

2. Direkte Folgerung aus a).

□

Konvergiert die Polynominterpolation?

Man kann sich nun die Frage stellen, wie gut generell stetige Funktionen durch Polynome approximierbar sind.

Eine Möglichkeit, dieses zu untersuchen, besteht darin, bei gegebenem $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge zu unterteilen (äquidistante Unterteilung) und das Polynom $p = p_n \in \mathcal{P}_n$ bestimmen, welches f an den $n+1$ Teilintervall-Endpunkten interpoliert. Konvergiert p_n gegen f , wenn man die Unterteilung immer feiner macht, d.h. für $n \to \infty$?. Daß dies i.A. leider nicht der Fall ist, zeigt das folgende klassische

Beispiel: (Runge) Wir betrachten die Interpolationspolynome $p_n \in \mathcal{P}_n$ für

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad [a,b] = [-1,1], \quad x_j = -1 + \frac{2j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Die folgende Tabelle zeigt, daß der Interpolationsfehler für große n stark anwächst:

n	$\max\limits_{x\in[-1,1]} \lvert f(x) - p_n(x)\rvert$
1	0.96
5	0.43
13	1.07
19	8.57

Ein Blick auf Abb. 3.2 bestätigt diese Ergebnisse: man sieht, daß bei $n = 16$ zwar p_n in der Mitte des Intervalls die Funktion f noch gut approximiert, es zum Rand hin jedoch immer stärker oszilliert. Diese Tendenz setzt sich für wachsende n weiter fort, so daß sogar gilt $\max\limits_{x\in[-1,1]} \lvert f(x) - p_n(x)\rvert \to \infty$ für $n \to \infty$.

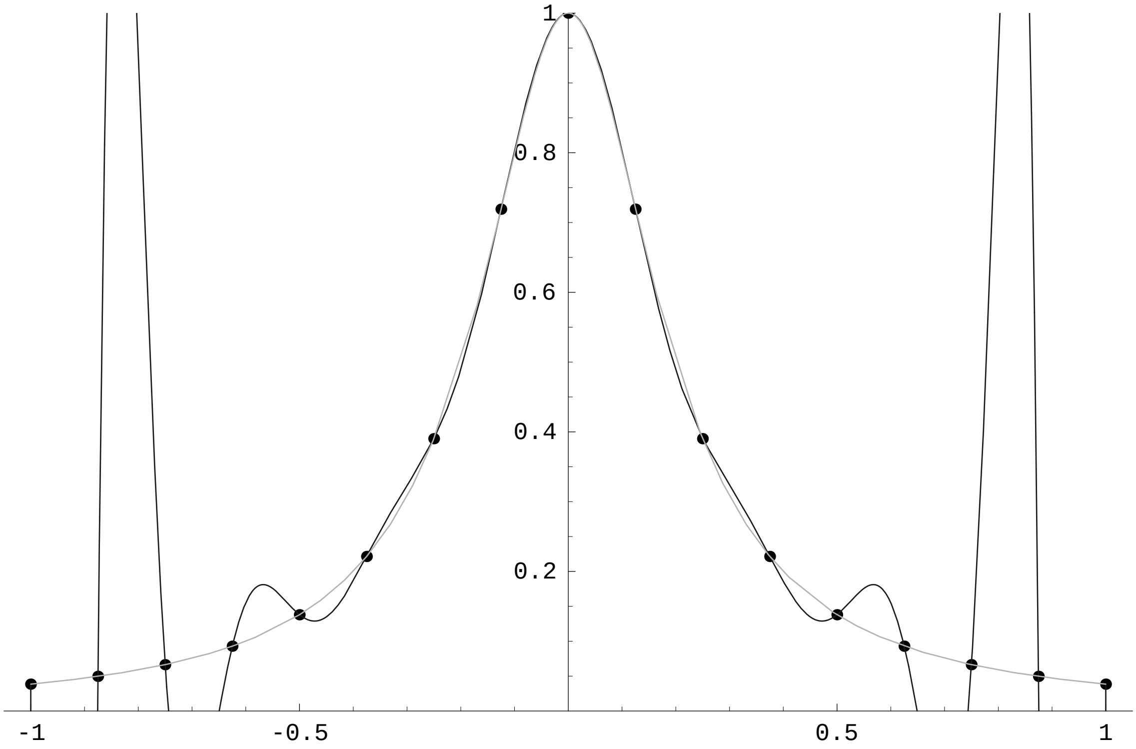

Abbildung 3.2: Runges Beispiel für $n = 16$

Ein Grund für dieses schlechte Approximationsverhalten liegt darin, daß die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ so ungünstig liegen, daß $\max\limits_{x \in [-1,1]} |w(x)| \to \infty$ für $n \to \infty$. Ein Ausweg besteht darin, die Stützstellen nicht äquidistant zu wählen, sondern derart, daß $\max\limits_{x \in [-1,1]} |w(x)|$ für $n \to \infty$ beschränkt bleibt.

Bemerkung: Es gilt sogar der folgende Satz von Faber: Zu jeder Folge von Intervallunterteilungen von $[a, b]$ gibt es eine auf $[a, b]$ stetige Funktion f, so daß die Interpolationspolynome p_n nicht gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergieren. Andererseits sagt der Approximationssatz von Weierstraß, daß man bei festem f zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom p finden kann, so daß $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \epsilon$.