Numerische Mathematik für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 8 , Abgabe: 8.1.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 29: (5 Punkte)
Es sei $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine stark diagonaldominante Matrix, d.h.

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und $A = D + N$, $N = A - D$ die Zerlegung von A in ihren Diagonal- und Nichtdiagonalteil. Zeigen Sie, daß D regulär ist, und daß für jeden Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ mit

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = D^{-1}(b - Nx)$$

gegen die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ konvergiert. (Hinweis: ∞-Norm benutzen!)

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie, beginnend mit $x_0 = (0, 0, 0)^T$, die ersten drei Iterationen des Verfahrens aus der vorigen Aufgabe durch.

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Berechnen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor der Länge 1.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Führen Sie die ersten 6 Schritte der Vektoriteration zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes von (1) durch. Nehmen Sie dabei als Startvektor $x_0 = (1, 0, 0)^T$.

Wir wünschen allen Studentinnen und Studenten Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!

(Aus der TAZ vom 15.12.97)