Numerische Mathematik für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 7 , Abgabe: 18.12.97 , 13.00 Uhr

Aufgabe 25: (3 Punkte)
Bestimmen Sie numerisch bis auf „Taschenrechnergenauigkeit“ den kleinsten positiven Fixpunkt von $\tan(x)$. Geben Sie dabei die ersten Folgenglieder Ihrer Iteration sowie die Anzahl der benötigten Iterationen an.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Erweitern Sie Algorithmus 5.1 aus dem Skript derart, daß er auch $p'''(x)$ (ohne explizite Berechnung der Koeffizienten von p''') berechnet, und führen Sie den Beweis für die Korrektheit Ihrer Erweiterung.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x)}{5} - xy^3 + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{\sin(y^2)}{2} \end{pmatrix}.$$

in $[0.6, 0.7] \times [0.1, 0.2]$ genau einen Fixpunkt besitzt, und bestimmen Sie diesen auf 4 Dezimalstellen genau.

Aufgabe 28: (5 Punkte)
Benutzen Sie den Banachschen Fixpunktsatz, um folgendes zu zeigen: Es gibt ein $a > 0$, so daß die Integralgleichung

$$f(x) = 1 - \int_0^x f(t)^2 \, dt, \quad x \in [0,a]$$

genau eine Lösung $f^* \in \mathcal{D}$ besitzt, wobei

$$\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{V} \ : \ \|f\|_\infty \leq 1\}, \quad \mathcal{V} := C[0,a], \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,a]} |f(x)|.$$

Berechnen Sie f^* mit Fixpunktiteration und Startfunktion $f_0 = 1$.