Dr. R. Bronstering WS 97/98

# Numerische Mathematik für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 5 , Abgabe: 27.11.97 , 13.00 Uhr

---

**Aufgabe 17:** (5 Punkte)
Benutzen Sie für $N = 1, 2, 4, 8$ die zusammengesetzte Trapezregel $I_{1,N}(f)$ zur numerischen Annäherung von $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ für die Funktionen

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{b) } f_2(x) = \sqrt{x}.$$

Berechnen Sie jeweils den Fehler $E = |I(f) - I_{1,N}(f)|$. Im Hinblick auf Satz 4.3 ist es naheliegend, einen Zusammenhang $E = E(h) = Kh^p$, $h = 1/N$, mit positiven Konstanten $K, p$ zu vermuten. Versuchen Sie, $K$ und $p$ aus den zuvor berechneten numerischen Ergebnissen ungefähr zu bestimmen. Wie erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse für $f_1$ und $f_2$?

**Aufgabe 18:** (4 Punkte)
Beim Gaußschen Integrationsverfahren benötigt man ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ mit $\langle p, q\rangle = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}_{n-1} = \operatorname{span}\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$. Ein naheliegender Ansatz zur Bestimmung eines solchen $p$ ist

$$p(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

zu schreiben und aus den $n-1$ Bedingungen

$$\langle p, x^i\rangle = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

ein lineares Gleichungssystem für die $a_0, \ldots, a_{n-1}$ herzuleiten. Bestimmen Sie die Koefizientenmatrix dieses Gleichungssystems. Um welche Matrix handelt es sich dabei?

**Aufgabe 19:** (3 Punkte)
Bestimmen Sie für $n = 3$ die Stützstellen $x_1, x_2, x_3$ und Gewichte $A_1, A_2, A_3$ der Gauß-Legendre-Integrationsformel. Nähern Sie mit dieser Formel $\int_{-1}^1 (1+x^2)^{-1}\,dx$ an.

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_j^{(n)}, x_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, n$ die Gewichte und Stützstellen der Gaußschen Integrationsformel $I_n(f)$ zur Approximation von $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ (also Gewichtsfunktion $w(x) = 1$). Zeigen Sie: Falls

1. $\lim_{n\to\infty} I_n(p) = I(p)$ für alle Polynome $p$, und

2. eine Konstante $K$ existiert derart, daß $\sum_{j=1}^{n} |A_j^{(n)}| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = I(f)$$

für alle $f \in C[a, b]$. Hinweis: Benutzen Sie den Approximationssatz von Weierstraß, der besagt, daß sich jede stetige Funktion auf einem endlichen Intervall gleichmäßig durch eine Folge von Polynomen approximieren läßt.