Dr. R. Bronstering WS 97/98

Numerische Mathematik für Lehramtskandidaten

Übungsblatt 3 , Abgabe: 13.11.97 , 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (2+2 Punkte)

a) Es sei A eine symmetrische und positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(Quotient aus dem größten und kleinsten Eigenwert).

b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1+\epsilon \\ 2+\epsilon \end{pmatrix}.$$

$\bar{x}$ werde als Näherung zur exakten Lösung x von $(A|b)$ genommen. Vergleichen Sie den tatsächlichen relativen Fehler mit der durch die Fehlerabschätzung (Satz 2.8) gelieferten oberen Schranke für den relativen Fehler ($\|\cdot\|_2$ verwenden).

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

(Hinweis: Benutzen Sie $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.)

Aufgabe 11: (2+2 Punkte)
Berechnen Sie jeweils das Polynom $p \in \mathcal{P}_3$, welches die Funktion $\sin \frac{\pi}{2} x$ in den Stützstellen $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1, 2)$ interpoliert, mit der Formel von

a) Lagrange

b) Neville

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, und

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} h_j(x) f(x_j) + \sum_{j=0}^{n} \overline{h}_j(x) f'(x_j)$$

mit

$$h_j(x) = [1 - 2(x - x_j) L_j'(x_j)] L_j^2(x), \quad \overline{h}_j(x) = (x - x_j) L_j^2(x), \quad L_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Zeigen Sie: p ist das eindeutig bestimmte Polynom aus $\mathcal{P}_{2n+1}$ mit $p(x_j) = f(x_j)$ und $p'(x_j) = f'(x_j)$, $j = 0 \ldots n$. (Hinweis: Es ist nicht nötig, $L_j'(x)$ auszurechnen)

Zusatzaufgabe: (4 Punkte)[1]
Interpolationsdaten $\mathcal{G} = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\}$ seien in zwei Speicherfeldern `x(0:n)` (für die x_i) und `y(0:n)` (für die y_i) gespeichert. Weiter sei eine Stelle $\bar{x}$ vorgegeben, an der das Interpolationspolynom ausgewertet werden soll. Geben Sie einen Algorithmus an, der mit der Formel von Neville in $O(n^2)$ Rechenoperationen die Werte $p_{0,\ldots,i}(\bar{x})$, $i = 0, \ldots, n$ so berechnet, daß am Ende `y(i)` den Wert von $p_{0,\ldots,i}(\bar{x})$ enthält.

[1] Mit dieser Aufgabe können Sie ihr „Punktekonto“ verbessern. Eine Nichtbearbeitung wirkt sich nicht auf die Punkteauswertung aus.