Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 01.06.1999 , 11.00 Uhr, Übungskasten 58

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{1-x^2} - \frac{\cos x}{1+x^2}$$

für $x = 1.55$ durch Auswerten der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad , \quad \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

in einfacher und doppelter Genauigkeit für $h = 1/4,\ 1/8,\ 1/16, \ldots$ und geben Sie den Fehler an.

Erklären Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Lösen Sie die Aufgaben:

(a) $y' = \sqrt{1-y^2} \quad , \quad y(0) = 0$

(b) $y' = xy + 1 \quad , \quad y(0) = 1$

(c) $y'' + y' = 6y \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2} \ , \ y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) \ .$$

(b) Ein Runge - Kutta - Verfahren ist konsistent von der Ordnung 1, wenn

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$$

ist.

(c) Gilt zusätzlich

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \gamma_j = \frac{1}{2} \qquad (\alpha_1 = 0) \ ,$$

so ist es sogar konsistent von der Ordnung 2.

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe) Schreiben Sie ein Programm RK$(f, x_0, y_0, \overline{x}, h)$, welches die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y)\ , \quad y(x_0) = y_0$$

im Intervall $[x_0, \overline{x}]$ mit der Schrittweite h mit Hilfe des Standard - Runge - Kutta - Verfahrens löst.

Erproben Sie das Programm für die Anfangswertaufgabe $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ mit $h = 0.1$.