Prof. Dr. F. Natterer SS 1999

Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 11.05.1999 , 11.00 Uhr, Übungskasten 58

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $Q = (b-a)f((b+a)/2)$ eine Näherungsformel für das Integral $I = \int_a^b f(x)dx$. Zeigen Sie:

1. Für $f \in C^1([a,b])$ gilt
$$|I - Q| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \mathrm{Max}_{[a,b]} |f'(x)|$$

2. Für $f \in C^2([a,b])$ gilt
$$|I - Q| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \mathrm{Max}_{[a,b]} |f''(x)|$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Die offenen Newton–Cotes–Formeln erhält man durch Integration an den Stützstellen $x_k = a + (k+1)h$, $k = 0, \dots, n$ mit $h = (b-a)/(n+2)$. Berechnen Sie die Gewichte für $n = 0,\ 1,\ 2$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm zur Romberg–Integration und testen Sie es für
$$\int_0^1 e^x dx$$
und
$$\int_0^1 \sqrt{x} dx.$$

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Die Tschebyscheff–Polynome U_n zweiter Art sind definiert durch:
$$U_0 = 1,\ U_1 = 2x,\ U_{k+1} = 2U_k - U_{k-1}.$$

Zeigen Sie:

1. Es ist in $[-1,1]$ $U_k(x) = \frac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$.
2. Die U_k sind in $[-1,1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ orthogonal.
3. $\int_{-1}^1 w U_k^2 dx = \frac{\pi}{2}$.