Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK II

Übungsblatt 3 , Abgabe: 04.05.99 , 11.00 Uhr, Übungskasten 58

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 13.5 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 29 & -16 & -8 \\ 28.25 & -14 & -9 \\ 30.25 & -19 & -6 \end{pmatrix}$$

haben beide den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

a) Berechnen Sie nach der Potenzmethode für beide Matrizen Approximationen x_A, λ_A bzw. x_B, λ_B für λ_1 und einen dazugehörigen Eigenvektor x_1, so daß für die Defekte

$$\begin{array}{lllllll} d_A & = & Ax_A - \lambda_A x_A & , & d_B & = & Bx_B - \lambda_B x_B \qquad \text{gilt :} \\ \varepsilon_A & = & \frac{\|d_A\|}{\|x_A\|_2} \leq 0.1 & , & \varepsilon_B & = & \frac{\|d_B\|_2}{\|x_B\|_2} \leq 0.1 \qquad . \end{array}$$

b) Vergleichen Sie die Verhältnisse

$$|\lambda_1 - \lambda_A|/\varepsilon_A \quad , \quad |\lambda_1 - \lambda_B|/\varepsilon_B$$

und erklären Sie das Resultat mit Hilfe von Satz 5.4.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade n und sei $P(\lambda_0) = 0$. Zeigen Sie:

$$|\lambda_0| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i| + 1 \; .$$

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Was kann man durch Anwendung des Satzes von Gerschgorin über die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrix sagen?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auch auf die transponierte Matrix an.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Sei A eine (n,n)-Matrix mit n dem Betrage nach verschiedenen Eigenwerten. A sei invariant unter einem QR-Schritt, d.h.: Ist $A = QR$, so auch $A = RQ$. Zeigen Sie: Dann ist A eine rechte Dreiecksmatrix.

Hinweis: Zeigen Sie, daß A, R, Q alle die gleichen Eigenvektoren haben, und benutzen Sie, daß die Eigenwerte von Q den Betrag 1 haben.