Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 27.04.99 , 11.00 Uhr, Übungskasten 58

Aufgabe 5: (Programmieraufgabe)

(a) Erstellen Sie ein Programm für den QR-Algorithmus.

(b) Wenden Sie Ihr Programm an auf das Beispiel 1 der **IMSL**-Routine eig_gen.

(c) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem von eig_gen.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Sei $H = (h_{ij})$ eine Hessenbergmatrix und $H = QR$, $R = (r_{ij})$, ihre QR-Zerlegung. Zeigen Sie: $|r_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der reellsymmetrischen Matrix A, und sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A, $R = (r_{ij})$. Dann gilt

$$|r_{nn}| \geq \min_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j| \ .$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Sei $A = A_1$ eine invertierbare (n, n)-Matrix mit n betragsmäßig verschiedenen Eigenwerten und $A = QDQ^{-1}$. Die Diagonalelemente von D seien ihrem Absolutbetrag nach geordnet. Nehmen Sie an, daß das LR-Verfahren für A durchführbar ist, also $A_k = L_k R_k$ und $A_{k+1} = R_k L_k$. Außerdem seien $Q = L_X R_X$ und $Q^{-1} = L_Y R_Y$ LR-Zerlegungen. Zeigen Sie, daß A_k dann gegen eine obere rechte Dreiecksmatrix konvergiert:

1. Sei $T_k := L_1 \cdot \ldots \cdot L_k$ und $U_k := R_k \cdot \ldots \cdot R_1$. Zeigen Sie: $T_k A_{k+1} = A T_k$ und $T_k U_k = A^k = QD^k Q^{-1}$.

2. Zeigen Sie: Für eine geeignete Matrix E_k gilt

   $$A^k = L_X (I + R_X E_k R_X^{-1}) R_X D^k R_Y$$

   und $E_k \to 0$.

3. Zeigen Sie durch LR-Zerlegung des Klammerausdrucks, daß T_k konvergiert und damit L_k. Benutzen Sie die Eindeutigkeit der LR-Zerlegung.

4. Zeigen Sie, daß $R_k = U_k U_{k-1}^{-1}$ konvergiert und damit A_k gegen eine obere rechte Dreiecksmatrix.