Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 11.06.96 , 11.00 Uhr, Kasten F 26

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - x^2} - \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

für $x = 1.55$ durch Auswerten der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad , \quad \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für $h = 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$ und geben Sie den Fehler an.
Erklären Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die zusammengesetzte Trapezregel bei Aufteilung in n Teilintervalle die trigonometrischen Polynome vom Grade $< n$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ exakt integriert.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Die (zusammengesetzte) Mittelpunktsregel lautet:

$$M_h = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}) \quad , \quad x_k = a + kh \; , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^2[a,b]$, so gilt

$$|M_h - I| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \; \underset{[a,b]}{\text{Max}} \; |f''(x)| \; .$$

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{2p+2}[a,b]$. Sei M_h die Mittelpunktsregel aus Aufgabe 23.

Man kann zeigen: Es gibt Konstanten $c_1, \ldots, c_p$ unabhängig von h, so daß

$$M_h = \int_a^b f\,dx + c_1 h^2 + \ldots + c_p h^{2p} + O(h^{2p+2}) \; .$$

Leiten Sie daraus ein Verfahren zur Romberg-Integration her, das auf Dreiteilung des Intervalls beruht.