Kapitel 9

Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1 Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen

Es soll eine ganz kurze Einführung in die Theorie der Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben werden. Für eine gründliche Behandlung kann man etwa das Buch W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1972 (Heidelberger Taschenbuch) konsultieren.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C(D)$. Die Gleichung

$$y' = f(x, y)$$

heißt gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Funktion $y \in C^1$, so daß

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

gilt. Die Anfangswertaufgabe besteht darin, eine solche Lösung zu finden, welche auch noch durch den Punkt (x_0, y_0) geht, d.h.

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Beispiele:

1) Bevölkerungswachstum.

   Sei $p(t)$ die Größe der Bevölkerung zur Zeit t, $g(t,p)$ ihre Geburtsrate, $s(t,p)$ ihre Sterberate. p_0 sei die Größe der Bevölkerung zur Zeit t_0.

   Die Funktion p löst offenbar die Anfangswertaufgabe

$$\frac{\dot{p}}{p} = g(t,p) - s(t,p) \quad , \quad p(t_0) = p_0 \; .$$

2) Lineare Differentialgleichung.

$$y' = p(x)y + q(x) \quad , \quad p, q \in C(a,b) \; .$$

   Die Lösung läßt sich explizit angeben. Man betrachtet zunächst die homogene Differentialgleichung ($q = 0$)

$$y' = p(x)y \; .$$

   Unter der Annahme $y(x) \neq 0$ erhält man der Reihe nach

$$\frac{y'}{y} = p(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\ell n\; y = p(x) \quad , \quad \ell n y = \int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt + \ell n y_0$$

$$y = y_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} \; .$$

   Die Lösung hängt also von einem freien Parameter y_0 ab, welcher offenbar gerade $y(x_0)$ ist und durch die Anfangsbedingung festgelegt wird.

   Für die inhomogene Gleichung ($q \neq 0$) macht man nun den Ansatz

$$y = c(x)y_H$$

   mit einer Lösung y_H der homogenen Gleichung. Es folgt

$$y' = c(x)y_H' + c'(x)y_H = c(x)p(x)y_H + c'(x)y_H = p(x)y + c'(x)y_H \; .$$

   y ist also Lösung von $y' = p(x)y + q(x)$, wenn $c'(x)y_H = q(x)$ gilt. Mit

$$y_H = e^{\int\limits_{x_o}^{x} p(x)dt}$$

ergibt sich

$$c'(x) = q(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dt} , \quad c(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds} dt$$

mit einer Konstanten c_0, und weiter

$$\begin{aligned} y &= \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds} dt \right) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} \\ &= y_0 e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int\limits_{x_0}^{x} q(t)e^{\int\limits_{t}^{x} p(s)ds} dt \, . \end{aligned}$$

Der erste Term ist eine Lösung der homogenen Gleichung mit Anfangswert y_0, der zweite die Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert 0.

3) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ hat die Lösung $y = \tan x$. Als stetig differenzierbare Funktion existiert diese nur für $|x| < \pi$ (obwohl $f(x, y) = 1 + y^2$ in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist).

4) $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ hat für jedes $c \geq 0$ die Lösung

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^{3/2} & , \quad x \geq c \\ 0 & \quad \text{sonst} \, . \end{cases}$$

Die Lösung einer Anfangswertaufgabe braucht also nicht eindeutig zu sein.

Zur Formulierung eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes benötigen wir folgende

Definition 9.1.1 *$f \in C(D)$ erfüllt in D eine Lipschitz-Bedingung, wenn es eine Konstante L gibt mit*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \, ,$$

wenn nur (x,y), $(x,z) \in D$. f erfüllt in D eine lokale Lipschitz-Bedingung, wenn es zu jedem Punkt in D eine Umgebung gibt, in der f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Satz 9.1.1 *f erfülle in D eine lokale Lipschitz-Bedingung und $(x_0, y_0) \in D$. Dann gibt es eine Lösung y der Anfangswertaufgabe*

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

mit folgender Eigenschaft: Jede weitere Lösung der Anfangswertaufgabe ist eine Restriktion von y.

Dabei heißt eine Funktion $\overline{y} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ eine Restriktion von $y : I \to R$, wenn $\overline{I} \subseteq I$ und y, $\overline{y}$ auf $\overline{I}$ übereinstimmen.

Die im Satz genannte Eigenschaft von y bedeutet einmal, daß die Lösungskurve dem Rand von D beliebig nahe kommt, zum anderen, daß die Lösung eindeutig ist.

9.2 Einschrittverfahren für Anfangswertaufgaben

Die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

besitze in einer abgeschlossenen beschränkten Umgebung U von x_0 eine eindeutig bestimmte Lösung y. Wir wollen y auf dem Gitter $I_h : x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots$ berechnen. Dazu ersetzen wir (2.1) durch die Differenzengleichung

$$\frac{1}{h}(y_{k+1} - y_k) = f_h(x_k, y_k) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

mit dem Startwert y_0 aus (2.1). Die "Schrittfunktion" f_h wird so gewählt, daß y_k eine Approximation für $y(x_k)$ ist. Wegen

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx$$

muß dazu

$$hf_h(x_k, y_k) \sim \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \tag{2.3}$$

sein. Die einfachste Weise, (2.3) zu erfüllen, ist

$$f_h(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) \; .$$

Das so entstehende Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

heißt Verfahren von Euler oder auch Polygonzugverfahren.

Beispiel: $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Euler-Verfahren mit $h = 0.1$:

k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0.0	0.0000	0.0000
1	0.1	0.1000	0.1003
2	0.2	0.2010	0.2027
3	0.3	0.3050	0.3093
4	0.4	0.4143	0.4228
5	0.5	0.5315	0.5463

Den “lokalen Diskretisierungsfehler” oder “Abschneidefehler” eines Einschrittverfahrens bekommt man, wenn man die exakte Lösung von (2.1) in (2.2) einsetzt:

$$T_h(x_{k+1}) = \frac{1}{h}(y(x_{k+1}) - y(x_k)) - f_h(x_k, y(x_k)) , \quad x_{k+1} \in U .$$

Definition 9.2.1 *Das Einschrittverfahren (2.2) heißt konsistent, falls*

$$\lim_{h\to 0} \max_{x_k \in U} |T_h(x_k)| = 0 .$$

Es heißt konsistent von der Ordnung p, falls für $h \to 0$

$$\max_{x_k \in U} |T_h(x_k)| = O(h^p) .$$

Beispiele:

1) Euler-Verfahren.

   Für $y' = f(x,y)$ ist

$$\begin{aligned} T_h(x_{k+1}) &= \frac{1}{4}(y(x_{k+1}) - y(x_k)) - f(x_k, y(x_0)) \\ &= y'(x_k) + \frac{h}{2}y''(\tilde{x}_k) - f(x_k, y(x_k)) , \quad \tilde{x}_k \in (x_k, x_{k+1}) \\ &= \frac{h}{2}y''(\tilde{x}_k) . \end{aligned}$$

   Also: Ist $y \in C^2(U)$, so ist das Euler-Verfahren konsistent mit der Ordnung 1.

2) Verbessertes Euler-Verfahren.

   Nach Trapezregel ist

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx = \frac{h}{2}\{f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))\} + \mathrm{O}(h^2) \qquad (2.4)$$

für $f \in C^2$ (also $y \in C^3$). Weiter ist für $y' = f(x,y)$

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + hy'(x_k) + \mathrm{O}(h^2) \\ &= y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \mathrm{O}(h^2) \;. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (2.4) ein, so entsteht

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx = \frac{1}{2}\{f(x_k,y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_k) + hf(x_k,y(x_k)))\} + \mathrm{O}(h^2) \;.$$

Mit der Schrittfunktion

$$f_h(x,y) = \frac{1}{2}\{f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))\}$$

hat man also

$$\begin{aligned} T_h(x_{k+1}) &= \frac{1}{h}(y(x_{k+1}) - y(x_k)) - f_h(x_k, y(x_k)) \\ &= \frac{1}{h}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx - \frac{1}{h}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx + \mathrm{O}(h^2) \\ &= \mathrm{O}(h^2) \;. \end{aligned}$$

Also hat man Konsistenz von der Ordnung 2.

Beispiel: $y' = 1 + y^2$, $y'(0) = 0$, $h = 0.1$. Verbessertes Euler-Verfahren:

k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0.0	0.0000	0.0000
1	0.1	0.1005	0.1003
2	0.2	0.2030	0.2027
3	0.3	0.3098	0.3093
4	0.4	0.4234	0.4228
5	0.5	0.5470	0.5463

Die Verbesserung gegenüber dem (einfachen) Euler-Verfahren ist offenkundig.

Wir wollen nun systematisch Verfahren hoher Konsistenzordnung herleiten. Eine vielbenutzte Klasse solcher Verfahren sind die Runge - Kutta - Verfahren. Das Verfahren m-ter Stufe lautet

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + h(\gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_m f_m)(x_k, y_k) \, , \\
f_1(x,y) &= f(x,y) \\
f_2(x,y) &= f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f_1(x,y)) \\
&\vdots \\
f_m(x,y) &= f(x + \alpha_m h, y + h[\beta_{m1} f_1 + \ldots + \beta_{m,m-1} f_{m-1}](x,y)) \, .
\end{aligned}$$

Man stellt alle Koeffizienten in dem Schema

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & \\
\vdots & & & \\
\alpha_m & \beta_{m1} & \ldots & \beta_{m-1} \\
\hline
 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_m
\end{array}$$

zusammen. Man nimmt übrigens immer $\alpha_k = \sum\limits_{\ell=1}^{k-1} \beta_{k\ell}$ an.

Beispiele:

$m = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
Euler, $\quad p = 1$

$m = 2$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \tfrac{h}{2}(f(x_k, y_k) + \\ &\quad + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))) \end{aligned}$$

Verbessertes Euler, $\quad p = 2$

$m = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \tfrac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ f_1 &= f(x_k, y_k) \\ f_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_1) \\ f_3 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_2) \\ f_4 &= f(x_k + h, y_k + hf_3) \end{aligned}$$

(Standard) Runge-Kutta, $\; p = 4$.

$m = 3$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \tfrac{h}{6}(f_1 + 4f_2 + 2f_3) \\ f_1 &= f(x_k, y_k) \\ f_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_1) \\ f_3 &= f(x_k + h\ , y_k - hf_1 + 2hf_2) \\ & \quad p = 3 \end{aligned}$$

9.3 Konvergenz von Einschrittverfahren

Vom lokalen Diskretisierungsfehler zu unterscheiden ist der globale Diskretisierungsfehler

$$D_h(x_h) = y_k - y(x_k) \; .$$

Definition 9.3.1 *Das Einschrittverfahren heißt konvergent, falls*

$$\lim_{h \to 0} \max_{x_k \in U} |D_h(x_k)| = 0 \; .$$

Es heißt konvergent von der Ordnung p, falls

$$\max_{x_k \in U} |D_h(x_k)| = O(h^p) \; .$$

Lemma 9.3.1 *Seien q, d_k, a_k nichtnegative Zahlen mit*

$$d_{k+1} \le q d_k + a_k \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots \quad .$$

Dann gilt

$$d_k \le q^k d_0 + \sum_{j=0}^{k-1} q^{k-j-1} a_j \; .$$

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Satz 9.3.1 *f_h erfülle in einer Umgebung D der Kurve $(x, y(x))_{x \in U}$ eine Lipschitz-Bedingung, d.h. es gebe eine von h, x unabhängige Zahl $L > 0$ mit*

$$|f_h(x, z_1) - f_h(x, z_2)| \le L |z_1 - z_2| \; ,$$

falls (x, z_1), $(x, z_2) \in D$.

Dann gilt: Solange $(x_k, y_k) \in D$ ist, besteht die Abschätzung

$$|y(x_k) - y_k| \le \frac{1}{L} \left(e^{L|x_k - x_0|} - 1 \right) \max_{j=1}^{k} |T_h(x_j)| \; .$$

Beweis: Aufgrund der Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers haben wir

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = hf_h(x_k, y(x_k)) + hT_h(x_{k+1}) \; .$$

Das Verfahren lautet

$$y_{k+1} - y_k = hf_h(x_k, y_k) \; .$$

Subtraktion der beiden Beziehungen ergibt mit $d_k = y(x_k) - y_k$

$$d_{k+1} - d_k = h(f_h(x_k, y(x_k)) - f_h(x_k, y_k)) + hT_h(x_{k+1}) \; .$$

Solange $(x_k, y_k) \in D$ ist, folgt aus der Lipschitz-Bedingung

$$|d_{k+1} - d_k| \leq hL|d_k| + h|T_h(x_{k+1})|$$

oder

$$|d_{k+1}| \leq (1 + hL)|d_k| + h|T_h(x_{k+1})| \; .$$

Das Lemma ergibt nun unmittelbar

$$\begin{aligned} |d_k| &\leq h \sum_{j=0}^{k-1} (1 + hL)^{k-j-1} |T_h(x_{j+1})| \\ &\leq h \sum_{j=0}^{k-1} (1 + hL)^{k-j-1} \; \max_{j=1}^{k} |T_h(x_j)| \; . \end{aligned}$$

Die behauptete Abschätzung ergibt sich durch Aufsummieren der geometrischen Reihe.

□

Satz 9.3.2 *Das Einschrittverfahren sei konsistent (von der Ordnung p) und f_h erfülle die Voraussetzung von Satz 9.3.1. Dann ist das Verfahren konvergent (von der Ordnung p).*

Beweis: D enthält einen Streifen $\{(x, y) : |y - y(x)| \leq d, \;\; x \in U\}$ der Breite $2d > 0$. Man wähle h so klein, daß für alle $x_k \in U$

$$\frac{1}{L}\left(e^{L(x_k - x_0)} - 1\right) \; \max_{j=1}^{k} |T_h(x_j)| \leq d \; .$$

Dann gilt die Abschätzung von Satz 9.3.1 für alle $x_h \in U$, und die Konvergenz (von der Ordnung p) folgt.

9.4 Mehrschrittverfahren

Ein (lineares) m-Schrittverfahren hat die Form ($\alpha_m \neq 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu==}^{m} \alpha_\nu y_{k+\nu} &= h\sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu f(x_{k+\nu}, y_{k+\nu})\ , \quad k = 0, 1, \ldots \\ y_k &= \overline{y}_k \quad , \qquad\qquad k = 0, \ldots, m-1\ . \end{aligned}$$

Es benötigt also m Startwerte $\overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_{m-1}$. Diese können etwa durch ein Einschrittverfahren gewonnen werden. Gegenüber den Einschrittverfahren besitzen Mehrschrittverfahren den Vorteil, daß sie pro Schritt nur <u>eine</u> Funktionswertung (nämlich $f_\nu(x_{k+\nu}, y_{k+\nu})$, ν der größte Index mit $\beta_\nu \neq 0$) benötigen. Ein Beispiel eines 2-Schrittverfahrens ist die Mittelpunktsregel

$$y_{k+2} - y_k = 2hf(x_{k+1}, y_{k+1})\ .$$

Ein Einschrittverfahren heißt explizit, wenn $\beta_m = 0$. Dann läßt sich y_{k+m} unmittelbar durch $y_{k+m-1}, \ldots, y_k$ ausdrücken. Ist $\beta_m \neq 0$, so tritt y_{k+m} auch auf der rechten Seite auf und man muß y_{k+m} durch Lösen einer nichtlinearen Gleichung berechnen. Dies kann iterativ in der Form

$$\begin{aligned} \alpha_m y_{k+m}^{(t+1)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} \alpha_\nu y_{k+\nu} &= h\beta_m f(x_{k+m}, y_{k+m}^{(t)}) \\ &+ \ h\sum_{\nu=0}^{m-1} \beta_\nu f(x_{k+\nu}, y_{k+\nu}) \end{aligned}$$

geschehen. Wegen

$$\frac{\partial y_{k+m}^{(t+1)}}{\partial y_{k+m}^{(t)}} = h\frac{\beta_m}{\alpha_m} f_y(x_{k+m}, y_{k+m}^{(t)})$$

gewinnt man bei jedem Iterationsschritt einen Faktor $\mathrm{O}(h)$ an Genauigkeit. Die Iteration konvergiert für kleine h also sehr schnell. Den Startwert $y_{m+k}^{(0)}$ kann man etwa durch ein explizites Verfahren berechnen. Man kombiniert also ein explizites mit einem impliziten Verfahren. In diesem Zusammenhang heißt das explizite Verfahren Prädiktor, das implizite Verfahren Korrektor, und man spricht von Prädiktor - Korrektor - Verfahren.

Im Folgenden werden wir die rückwärtsgenommenen Differenzen

$$
\begin{aligned}
\nabla\, y_k &= y_k - y_{k-1} \\
\nabla^2 y_k &= \nabla y_k - \nabla y_{k-1} = y_k - 2y_{k-1} - y_{k-2} \\
&\vdots \\
\nabla^q y_k &= \nabla \nabla^{q-1} y_k
\end{aligned}
$$

benutzen.

Lemma 9.4.1 *Es gilt für $q \geq 0$*

$$
\nabla^q y_k = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \begin{pmatrix} q \\ \nu \end{pmatrix} y_{k-\nu} \quad , \quad y_{k-q} = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \begin{pmatrix} q \\ \nu \end{pmatrix} \nabla^\nu y_k \; .
$$

Beweis: Wir definieren auf dem linearen Raum der Folgen $y = (y_k)_{k=-\infty,+\infty}$ den linearen Operator

$$
(Ty)_k = y_{k-1} \; .
$$

Die binomische Formel ergibt

$$
(I - T)^q = \sum_{\nu=0}^{q} \begin{pmatrix} q \\ \nu \end{pmatrix} (-1)^\nu T^\nu \; .
$$

Wegen $I - T = \nabla$, $(T^\nu y)_k = y_{k-\nu}$ ist dies die erste Formel. Die zweite bekommen wir ganz entsprechend aus

$$
T^q = (I - \nabla)^q = \sum_{\nu=0}^{q} \begin{pmatrix} q \\ \nu \end{pmatrix} (-\nabla)^\nu \; .
$$

□

Lemma 9.4.2 *Das Polynom p vom Grade $\leq q$ mit $p(x_{k-\ell}) = y_{k-\ell}$ $\ell = 0, \ldots, q$ ist*

$$
p(x) = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} \nabla^\nu y_k \quad , \quad s = \frac{x - x_k}{h} \; .
$$

Hier sind die Binomialkoeffizienten für reelle s durch

$$\binom{s}{\nu} = \frac{1}{\nu!} s(s-1)\dots(s-(\nu-1)) \; .$$

erklärt.

Beweis: p ist ein Polynom vom Grade $\leq q$, denn es ist

$$\binom{-s}{\nu} = \frac{1}{\nu!}(s-\nu+1)\dots(-s) \in \mathcal{P}_\nu \; .$$

Weiter gilt für $0 \leq \mu \leq q$

$$\begin{aligned} p(x_{k-\mu}) &= \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \binom{\mu}{\nu} \nabla^\nu y_k \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \binom{\mu}{\nu} \nabla^\nu y_k \\ &= y_{k-\mu} \end{aligned}$$

nach Lemma 9.4.1.

□

Zur Aufstellung konkreter Mehrschrittverfahren gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

(a) Integration.

Aus der Differentialgleichung folgt durch Integration

$$y(x_{k+m}) - y(x_{k+\ell}) = \int_{x_{k+\ell}}^{x_{k+m}} f(x, y(x))dx \; .$$

Man ersetzt nun $f(x, y(x))$ durch das Interpolationspolynom p vom Grade m an den Stellen $x_k, \dots, x_{k+m}$ (implizites Verfahren) oder vom Grade $m-1$ an den Stellen $x_k, \dots, x_{k+m-1}$ (explizite Verfahren) und setzt

$$y_{k+m} - y_{k+\ell} = \int_{x_{k+\ell}}^{x_{k+m}} p(x)dx \; .$$

Als Stützwerte werden bei der Interpolation die Zahlen $f_j = f(x_j, y_j)$ genommen. Es ist dann $p(x)$ eine lineare Funktion der Zahlen f_j.

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich durch ihr Integrationsintervall $(x_{k+\ell}, x_{k+m})$ und durch die Stützstellen von p. Wir betrachten folgende Möglichkeiten:

Intervall / Stützstellen	(x_{k+m-1}, x_{k+m})	(x_{k+m-2}, x_{k+m})	
$x_k, \ldots, x_{k+m-1}$	Adams-Bashforth	Nyström	explizit
$x_k, \ldots, x_m$	Adams-Moulton	Milne-Simpson	implizit

Adams-Bashforth:

$$\begin{aligned}
y_{k+m} - y_{k+m-1} &= \int\limits_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} p(x)dx\ , \quad p(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} \nabla^\nu f_{k+m-1} \\
&= h(\gamma_0 f_{k+m-1} + \gamma_1 \nabla^1 f_{k+m-1} + \ldots + \gamma_{m-1} \nabla^{m-1} f_{k+m-1})\ . \\
\gamma_\nu &= \frac{1}{h} \int\limits_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} (-1)^\nu \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} dx \quad , \quad s = \frac{x - x_{k+m-1}}{h}\ , \\
&= (-1)^\nu \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} ds \quad .
\end{aligned}$$

Adams-Moulton:

$$\begin{aligned}
y_{k+m} - y_{k+m-1} &= \int\limits_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} p(x)dx\ , \quad p(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1) \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} \nabla^\nu f_{k+m} \\
&= h(\gamma_0 f_{k+m} + \gamma_1 \nabla^1 f_{k+m} + \ldots + \gamma_m \nabla^m f_{k+m})\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\nu &= \frac{1}{h}(-1)^\nu \int\limits_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} dx \ , \quad s = \frac{x - x_{k+m}}{h} \ , \\
&= (-1)^\nu \int\limits_{-1}^{0} \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} ds \ .
\end{aligned}
$$

Nyström:

$$
\begin{aligned}
y_{k+m} - y_{k+m-2} &= h(\gamma_0 f_{k+m-1} + \gamma_1 \nabla^1 f_{k+m-1} + \ldots + \gamma_{m-1} \nabla^{m-1} f_{k+m-1}) \ , \\
\gamma_\nu &= (-1)^\nu \int\limits_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} ds \ .
\end{aligned}
$$

Milne-Simpson:

$$
\begin{aligned}
y_{k+m} - y_{k+m-2} &= h(\gamma_0 f_{k+m} + \gamma_1 \nabla^1 f_{k+m} + \ldots + \gamma_m \nabla^m f_{k+m}) \ , \\
\gamma_\nu &= (-1)^\nu \int\limits_{-2}^{0} \begin{pmatrix} -s \\ \nu \end{pmatrix} ds \ .
\end{aligned}
$$

Die γ_ν sind in Tabellen erfaßt (siehe z.B. Henrici, S. 191):

ν	0	1	2	3	4
Adams-Bashforth	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$
Adams-Moulton	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{19}{720}$
Nyström	2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{9}$
Milne-Simpson	2	-2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{90}$

Als Beispiel für den Gebrauch dieser Tabelle betrachten wir das 2-Schritt - Nyström - Verfahren. Mit $\gamma_0 = 2$, $\gamma_1 = 0$ aus der entsprechenden Zeile der Tabelle ergibt sich mit $m = 2$

$$
y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1} \ ,
$$

also gerade die Mittelpunktsregel.

(b) Differentiation.

In der Differentialgleichung ersetzt man die Ableitung in einem Punkt $x_{k+\ell}$ durch die Ableitung des Interpolationspolynoms vom Grade m mit Stützstellen $x_k, \ldots, x_{k+m}$ und Stützwerten $y_k, \ldots, y_{k+m}$:

$$\begin{aligned} p'(x_{k+\ell}) &= f(x_{k+\ell}, y_{k+\ell}) \ , \\ p(x) &= \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \binom{-s}{\nu} \nabla^\nu y_{k+m} \ , \quad s = \frac{x - x_{k+m}}{h} \ . \end{aligned}$$

Dies ergibt ein Verfahren der Form

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_{\nu,m-\ell} \nabla^\nu y_{k+m} &= h f_{k+\ell} \ , \\ \gamma_{\nu,m-\ell} &= h \frac{d}{dx} (-1)^\nu \binom{-s}{\nu} \Big|_{x=x_{k+\ell}} \\ &= (-1)^\nu \frac{d}{ds} \binom{-s}{\nu} \Big|_{s=\ell-m} \ . \end{aligned}$$

Offenbar ist $\gamma_{0,m-\ell} = 0$. Einige $\gamma_{\nu,r}$ finden sich in folgender Tabelle:

r \ ν	1	2	3	4
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$
2	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Das 2-Schritt-Verfahren mit $\ell = 1$ lautet zum Beispiel

$$\begin{aligned} \nabla^1 y_{k+2} - \frac{1}{2} \nabla^2 y_{k+2} &= h f_{k+1} \qquad \text{oder} \\ y_{k+2} - y_k &= 2h f_{k+1} \ , \end{aligned}$$

also wieder die Mittelpunktsregel.

9.5 Konvergenz von Mehrschrittverfahren

Den lokalen Diskretisierungsfehler eines Mehrschrittverfahrens erklärt man wie beim Einschrittverfahren durch

$$\begin{aligned} T_h(x_{k+m}) &= \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k+\nu}) - \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu f(x_{k+\nu}, y(x_{k+\nu})) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k+\nu}) - \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu y'(x_{k+\nu}) \end{aligned}$$

für die exakte Lösung y. Die Definition der Konsistenz erfolgt dann wörtlich wie beim Einschrittverfahren.

Beispiele:

1) Um die Konsistenzordnung des Adams-Bashforth-Verfahrens zu bestimmen, erinnern wir uns an die Herleitung des Verfahrens. Danach ist

$$T_h(x_{k+m}) = \frac{1}{h}(y(x_{k+m}) - y(x_{k+m-1})) - \frac{1}{h}\int_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} p(x)dx \ ,$$

wo p das Interpolationspolynom vom Grade $m-1$ der Funktion $f(x, y(x))$ an den Stützstellen $x_k, \ldots, x_{k+m-1}$ ist. Nach I.5.2 ist für $f \in C^m$

$$p - f = \mathrm{O}(h^m) \ ,$$

so daß wir

$$T_h(x_{k+m}) = \frac{1}{h}\int_{x_{k+m-1}}^{x_{k+m}} (f(x, y(x)) - p(x))dx = \mathrm{O}(h^m)$$

erhalten. Die Konsistenzordnung ist also (mindestens) m. Ebenso sieht man, daß die Konsistenzordnung des Nyström-Verfahrens m ist, während die Konsistenzordnung der beiden impliziten Verfahren Adams-Moulton und Milne-Simpson $m+1$ ist.

2) $\quad y_{k+2} - (1+a)y_{k+1} + ay_k = \frac{h}{2}((3-a)f_{k+1} - (1+a)f_k)$.

Es ist für $y \in C^4$

$$\begin{array}{rcccccccccc} y(x_{k+\nu}) & = & y(x_k) & + & \nu h y'(x_k) & + & \frac{1}{2}\nu^2 h^2 y''(x_k) & + & \frac{1}{6}\nu^3 h^3 y'''(x_k) & + & \mathrm{O}(h^4) \, . \\ y'(x_{k+\nu}) & = & y'(x_k) & + & \nu h y''(x_k) & + & \frac{1}{2}\nu^2 h^2 y'''(x_k) & & & + & \mathrm{O}(h^3) \end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_h(x_{k+m}) &= h\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}(1+a) - \frac{1}{2}(3-a)\right) y''(x_k) \\ &+ h^2\left(\frac{8}{6} - \frac{1}{6}(1+a) - \frac{1}{4}(3-a)\right) y'''(x_k) + \mathrm{O}(h^3) \\ &= h^2\left(\frac{5}{12} + \frac{a}{12}\right) y'''(x_k) + \mathrm{O}(h^3) \quad . \end{aligned}$$

Wir haben also Konsistenzordnung $p = 2$ für $a \neq -5$, sonst $p = 3$.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Begriff. Numerische Experimente mit dem im letzten Beispiel angegebenen Verfahren ergeben befriedigende Resultate für $a = 0$ (d.h. Adams-Bashforth mit $m = 2$), aber unbrauchbare für $a = -5$. Die Konsistenzordnung kann also für die Konvergenz nicht, wie bei den Einschrittverfahren, das einzig Maßgebende sein. Wir werden sehen, daß bei Mehrschrittverfahren neben der Konsistenz die Stabilität notwendig für Konsistenz ist.

Sei für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\rho(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \lambda^\nu \quad , \qquad \sigma(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \lambda^\nu \; .$$

Die Eigenschaften dieser beiden Polynome werden sich als für die Eigenschaften des Mehrschrittverfahrens wichtig erweisen.

Definition 9.5.1 *Ein Mehrtschrittverfahren heißt stabil, wenn für die Nullstellen λ von ρ folgende Bedingung erfüllt ist*

a) $\quad |\lambda| \leq 1$

b) $\quad$ *Ist $|\lambda| = 1$, so ist λ einfach.*

Beispiele:

1) Adams-Bashforth.

Es ist $\rho(\lambda) = \lambda^{m-1}(\lambda - 1)$. Nullstellen sind $\lambda = 0$ $((m-1)$-fach) und $\lambda = 1$ (einfach). Also ist das Verfahren stabil.

2) Nyström.

Es ist $\rho(\lambda) = \lambda^{m-2}(\lambda^2 - 1)$. Nullstellen sind $\lambda = 0$ $((m-2)$-fach) und $\lambda = \pm 1$ (jeweils einfach). Also ist das Verfahren stabil.

3) Das oben genannte Verfahren mit $\rho(\lambda) = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a = (\lambda - a)(\lambda - 1)$. Das Verfahren ist stabil genau dann, wenn $|a| \leq 1$, aber $a \neq 1$ ist.

Wir benutzen diese Verfahren für $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Für die Schrittweite $h = 0.01$ und $y_0 = 0$, $y_1 = \tan(h)$ ergibt sich

	x_k	$y_k(a=0)$	$y_k(a=1)$	$y_k(a=1.1)$	$y(x_k)$
0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
20	0.2	0.20269	0.20251	0.20232	0.20271
40	0.4	0.42775	0.42185	0.41821	0.42279
60	0.6	0.68404	0.68139	0.64780	0.68414
80	0.8	1.02939	1.02239	0.76585	1.02964
100	1.0	1.55667	1.53706	-0.23823	1.55741
120	1.2	2.56893	2.49939	-6.70901	2.57215
140	1.4	5.75965	5.27453	-24.76387	5.79788

Für die instabilen Verfahren mit $a = 1$ und $a = 1.1$ treten offenbar Probleme auf.

Definition 9.5.2 *Ein Mehrschrittverfahren heißt konvergent, wenn für alle Startwerte* $\overline{y}_k$ *mit* $\lim_{h \to 0} |y(x_k) - \overline{y}_k| = 0, \; k = 0, \ldots, m-1$

$$\lim_{h \to 0} \max_{x_k \in U} |y(x_k) - y_k| = 0$$

gilt. Es heißt konvergent von der Ordnung p, wenn aus $y(x_k) - \overline{y}_k = O(h^p)$ *,* $k = 0, \ldots, m-1$

$$\max_{x_k \in U} |y(x_k) - y_k| = O(h^p)$$

folgt.

Wir wollen zeigen, daß Konvergenz gleichbedeutend ist mit Konsistenz und Stabilität. Dazu benötigen wir einige einfache Tatsachen über Differenzengleichungen.

Unter einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k+\nu} = c_k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots \quad .$$

Die Gleichung heißt homogen, falls $c_k = 0$, andernfalls inhomogen. Für die Lösung der homogenen Gleichung macht man den Ansatz $z_k = \lambda^k$. Dies ist eine Lösung, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \lambda^{k+\nu} = \lambda^k \rho(\lambda) = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \ldots \quad ,$$

d.h. wenn $\rho(\lambda) = 0$ ist. Ist λ eine zweifache Nullstelle von ρ, so ist $\rho'(\lambda) = 0$ und damit auch

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu (k+\nu) \lambda^{k+\nu} &= \lambda^k \left\{ k \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \lambda^\nu + \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \nu \lambda^\nu \right\} \\ &= \lambda^k \{ k\rho(\lambda) + \rho'(\lambda) \} = 0 \ , \end{aligned}$$

d.h. es ist auch $z_k = k\lambda^k$ Lösung. Genau so sieht man, daß im Falle einer r-fachen Wurzel λ die Folgen $z_k = \lambda^k$, $z_k = k\lambda^k, \ldots, z_k = k^{r-1}\lambda^k$ Lösungen sind. Damit hat man aber auch schon alle Lösungen der homogenen Differentialgleichungen gefunden.

Satz 9.5.1 *Seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *die Nullstellen von* ρ *mit den Vielfachheiten* $r_1, \ldots, r_n$*. Dann sind*

$$\lambda_j^k \ , \ k\lambda_j^k, \ldots, k^{r_j-1}\lambda_j^k \qquad , \quad j = 1, \ldots, n$$

$m = r_1 + \ldots + r_n$ Lösungen der homogenen Differenzengleichung. Jede weitere Lösung z_k ist eine Linearkombination dieser Lösungen, d.h. es gilt mit Konstanten a_{jr}

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{r_j-1} a_{jr} k^r \lambda_j^k \quad .$$

Die a_{rj} sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\alpha_m = 1$. Die Differenzengleichung kann dann in der Form

$$Z_{k+1} = AZ_k \ , \quad Z_k = \begin{bmatrix} z_k \\ \vdots \\ z_{k+m-1} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & & & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix}$$

geschrieben werden.

Dann ist also $D_k = A^k D_0$. Ist $J = X^{-1}AX$ die Jordan'sche Normalform, so ist

$$D_k = X^{-1} J^k X D_0 \quad .$$

In unserem Fall haben die Jordan-Kästchen $J_1, \ldots, J_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Dimensionen $r_1, \ldots, r_n$, vergleiche Übungsaufgabe 3. Die Potenzen von J_ℓ haben wir schon in 6.2 ausgerechnet; wir fanden

$$J_\ell^k = \lambda_\ell^k (A_0 + kA_1 + \ldots + k^{r_\ell - 1} A_{r_\ell - 1})$$

mit gewissen Matrizen A_j, die noch von λ_ℓ abhängen. D_k ist also wirklich als Linearkombination der genannten Ausdrücke darstellbar.

$\square$

Als wichtige Folgerung aus Satz IX.9.1 haben wir:

Satz 9.5.2 *Ein Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil, wenn alle Lösungen der Differenzengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_{k+\nu} = 0 \quad , \qquad k = 0, 1, \ldots$$

für $k \to \infty$ beschränkt bleiben.

Satz 9.5.3 *Sei A eine (m,m)-Matrix und $\rho(A)$ ihr Spektralradius. Alle Eigenwerte von A mit Betrag $\rho(A)$ seien algebraisch einfach. Dann gibt es eine Vektornorm $\| \;\; \|$, so daß $\|A\| = \rho(A)$.*

Beweis: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von A mit $|\lambda_i| = \rho(A)$. Dann gibt es eine Matrix X, so daß

$$X^{-1}AX = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{O} \\ & & \lambda_r & \\ \hline \mathbf{O} & & & B \end{array}\right) \quad ,$$

wo die $(m-r, m-r)$-Matrix B nur noch die Eigenwerte mit Betrag $< \rho(A)$ hat. Nach Satz 1.3.2 gibt es eine Norm $\| \;\; \|_{m-r}$ in $\mathbb{C}^{m-r}$ mit $\|B\|_{m-r} \leq \rho(A)$. Führen wir nun in $\mathbb{C}^m$ die Norm

$$\left\| \begin{pmatrix} x_r \\ x_{m-r} \end{pmatrix} \right\| = \max\{\|x_r\|_\infty, \|x_{m-r}\|_{m-r}\}$$

ein, so leistet die Norm $\|X^{-1}x\|$ das Gewünschte.

□

Satz 9.5.4 *f erfülle in einer Umgebung D der Kurve $(x, y(x))_{x \in U}$ eine Lipschitz-Bedingung.*

Das Mehrschrittverfahren sei stabil. Dann gibt es Konstanten C_1, C_2, $h_0 > 0$, so daß für $h < h_0$

$$|y(x_k) - y_k| \leq C_1 e^{C_2(x_k - x_0)} \left\{ \max_{k=0}^{m-1} |y(x_k) - y_k| + \max_{j=m}^{k} |T_h(x_j)| \right\} \;,$$

solange $(x_k, y_k) \in D$.

Beweis: Nach Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers ist

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k+\nu}) = h \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu f(x_{k+\nu}, y(x_{k+\nu})) + hT_h(x_{k+m}) \ ,$$

und das Verfahren lautet

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k+\nu} = h \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu f(x_{k+\nu}, y_{k+\nu}) \ .$$

Substraktion ergibt mit $d_k = y(x_k) - y_k$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu d_{k+\nu} &= h \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu (f(x_{k+\nu}, y(x_{k+\nu})) - f(x_{k+\nu}, y_{k+\nu}) + hT_h(x_{k+m}) \\ &= hc_k \quad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Matrizen und Vektoren ($\alpha_m = 1$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \dots & & & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} , \quad D_k = \begin{bmatrix} d_k \\ \vdots \\ d_{k+m-1} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

können wir dies auch in der Form

$$D_{k+1} = AD_k + hc_k B$$

schreiben. A hat $\rho(\lambda)$ als charakteristisches Polynom. Nach Satz 9.5.3 gibt es also eine Vektornorm $\| \ \|$, so daß $\|A\| \leq 1$.

$$\|D_{k+1}\| \leq \|D_k\| + h|c_k|\|B\| \ .$$

Solange $(x_k, y_k) \in D$ gilt, haben wir

$$|c_k| \leq L \sum_{\nu=0}^{m} |\beta_\nu||d_{k+\nu}| + |T_h(x_{k+m})| \leq K(\|D_k\|)|T_h(x_{k+m})|$$

mit einer geeigneten Konstanten K. Für $h\|B\|K < 1$ ist also

$$\|D_{k+1}\| \le q\|D_k\| + ha_k \quad ,$$
$$q = (1 + h\|B\|K)/(1 - h\|B\|K)\ , \quad a_k = |T_h(x_{k+m})|\|B\|/(1 - h\|B\|K)\ .$$

Nach Lemma 3.1 folgt

$$\|D_k\| \le q^k\|D_0\| + h\sum_{j=0}^{k-1} q^{k-j-1}a_j\ .$$

Nun benutzen wir die Ungleichung

$$\frac{1+x}{1-x} \le 1 + 4x \quad , \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}\ .$$

Dann wird für $h\|B\|K \le 1/2 \quad q \le 1 + 4h\|B\|K$ und damit

$$q^k \le \left(1 + 4\|B\|K\frac{x_k - x_0}{k}\right)^k \le e^{4\|B\|K(x_k - x_0)}\ .$$

Für D_k ergibt sich nun durch Aufsummieren der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\|D_k\| &\le q^k\|D_0\| + h\frac{q^k - 1}{q - 1}\ \max_{j=0}^{k-1} a_j \\
&\le e^{4\|B\|K(x_k - x_0)}\left(\|D_0\| + \frac{1}{2K}\ \max_{j=0}^{k-1}|T_h(x_{j+m})|\right)\ .
\end{aligned}$$

Da in $\mathbb{R}^m$ alle Normen äquivalent sind, folgt die behauptete Ungleichung.

$\square$

Hieraus folgt wie in §3 sofort

Satz 9.5.5 *f erfülle die Voraussetzungen von Satz 4. Ist das Mehrschrittverfahren stabil und konsistent (von der Ordnung p), so ist das Verfahren konvergent (von der Ordnung p).*

Daß Stabilität notwendig ist für Konvergenz, folgt leicht aus dem Verhalten der Lösungen von Differenzengleichungen:

Satz 9.5.6 *Ist ein Mehrschrittverfahren konvergent für $y' = 0$, $y(0) = 0$, so ist es stabil.*

Beweis: Sei λ eine Wurzel von ρ der Vielfachheit r. Wir geben die Anfangswerte

$$\overline{y}_k = k^{r-1}\lambda^k h \quad , \qquad k = 0, \ldots, m-1 \; .$$

vor. Das Verfahren lautet

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y_{k+\nu} = 0 \;\; , \quad k = 0, 1, \ldots \;\; , \quad y_k = \overline{y}_k \;\; , \quad k = 0, \ldots, m-1 \; .$$

Nach Satz 9.5.1 ist

$$y_k = k^{r-1}\lambda^k \varepsilon(h) \quad , \qquad k = 0, 1, \ldots \quad ,$$

Wir lassen nun $h \to 0$ und $k \to \infty$ so streben, daß $x_k = hk = \overline{x} > 0$. Dann muß wegen der vorausgesetzten Konvergenz $y_k \to 0$ streben. Also folgt

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\overline{x}}{k} \right) k^{r-1} \lambda^k = 0 \; .$$

Dies ist nur möglich, wenn $|\lambda| \leq 1$ und $r = 1$ für $|\lambda| = 1$.

□

9.6 Konsistenz und Stabilität von Mehrschrittverfahren

Vom vorhergehenden Paragraphen ist es klar, daß man nur mit stabilen Verfahren arbeiten kann. Aus Effizienzgründen möchte man Verfahren möglichst hoher Konsistenzordnung verwenden. Unglücklicherweise beschränkt die Forderung nach Stabilität die an und für sich mögliche Konsistenzordnung.

Satz 9.6.1 *Sei $\varphi(\lambda) = \frac{\rho(\lambda)}{\ell n \lambda} - \sigma(\lambda)$. Das Mehrschrittverfahren ist genau dann konsistent, wenn $\varphi(1) = 0$. Es ist genau dann konsistent von der Ordnung p, wenn φ bei $\lambda = 1$ eine Nullstelle der Ordnung p hat.*

Beweis: Für $y \in C^{p+1}$ ist

$$\begin{array}{rclclclcl} y(x_{k+\nu}) & = & y(x_k) & + & \nu h y'(x_k) & + \ldots + & \frac{(\nu h)^p}{p!} y^{(p)}(x_k) & + & \mathrm{O}(h^{p+1}) \\ y'(x_{k+\nu}) & = & y'(x_k) & + & \nu h y''(x_k) & + \ldots + & \frac{(\nu h)^{p-1}}{(p-1)!} y^{(p)}(x_k) & + & \mathrm{O}(h^p)\,. \end{array}$$

Dies ergibt für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned} T_h(x_{k+m}) &= \frac{1}{h} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu y(x_{k+\nu}) - \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu y'(x_{k+\nu}) \\ &= \frac{1}{h} C_0 y(x_k) + C_1 y'(x_k) + \ldots + h^{p-1} C_p y^{(p)}(x_k) + \mathrm{O}(h^p)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \quad , \\ C_1 &= \sum_{\nu=0}^{m} \nu \alpha_\nu - \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \quad , \\ &\vdots \\ C_p &= \frac{1}{p!} \sum_{\nu=0}^{m} \nu^p \alpha_\nu - \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=0}^{m} \nu^{p-1} \beta_\nu\,. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\chi(z) = \varphi(e^z) = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu e^{\nu z} - \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu e^{\nu z}\,.$$

Die Potenzreihe um $z = 0$ für $e^{\nu z}$ ergibt für $z \to 0$

$$\begin{aligned}\chi(z) &= \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu \sum_{\mu=0}^{p}\frac{(\nu z)^\mu}{\mu!} - \sum_{\nu=0}^{m}\beta_\nu \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{(\nu z)^\mu}{\mu!} + \mathrm{O}(z^p) \\ &= \frac{1}{z}C_0 + C_1 + \ldots + z^{p-1}C_p + \mathrm{O}(z^p) \ .\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ hat } p\text{-fache Nullstelle bei } \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \chi \text{ hat } p\text{-fache Nullstelle bei } z = 0 \\ \Leftrightarrow\ & C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0 \\ \Leftrightarrow\ & T_h(x_{k+m}) = \mathrm{O}(h^p) \qquad \text{für alle } y \in C^{p+1} \ .\end{aligned}$$

Dies erledigt den Fall der Konsistenzordnung p. Konsistenz schlechthin ist gleichbedeutend mit $C_0 = C_1 = 0$, d.h. mit $\chi(0) = 0$ und damit $\varphi(1) = 0$.

□

Nach dem Satz stellt Konsistenz der Ordnung p $p + 1$ Bedingungen an die $2m + 1$ (nach Normierung etwa auf $\alpha_m = 1$) Koeffizienten eines m-Schrittverfahrens. Man erwartet also, daß man die Konsistenzordnung $2m$ erzielen kann. Dies ist auch der Fall, aber leider nutzlos, wie man an dem folgenden Satz sieht.

Satz 9.6.2 *Ist ein m-Schrittverfahren stabil, so ist seine Konsistenzordnung höchstens $m + 1$ für m ungerade und $m + 2$ für m gerade.*

Beweis: Zunächst einige Vorbemerkungen.

(i) Die gebrochen lineare Transformation $w = \frac{z-1}{z+1}$ bildet den Einheitskreis der z-Ebene auf die linke Halbebene der w-Ebene ab. Denn linear gebrochene Abbildungen bilden Kreise auf Kreise ab. Da ein Kreis durch 3 Punkte eindeutig bestimmt ist, geht der Einheitskreis mit den Punkten 1, i, -1 in die imaginäre Achse mit den Punkten 0, i, ∞ über. Das Innere des Einheitskreises muß dabei in die linke Halbebene übergehen, weil 0 in -1 übergeht.

(ii) Die Koeffizienten eines reellen Polynoms, dessen Wurzeln nur Realteile ≤ 0 haben, haben alle das gleiche Vorzeichen.

Denn ist r ein solches Polynom und sind x_μ die reellen und $x_\nu \pm iy_\nu$ die konjugierten komplexen Wurzeln, so ist

$$r(z) = a \prod_\mu (z - x_\mu) \prod_\nu ((z - x_\nu)^2 + y_\nu^2)$$

und die Behauptung folgt durch Ausmultiplizieren.

(iii) Die Koeffizienten $c_{2\nu}$ in

$$\frac{z}{\ell n \frac{1+z}{1-z}} = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots$$

sind negativ für $\nu > 0$ (siehe Henrici, S. 223).

Nun zum Beweis des Satzes! Seien ρ, σ die Polynome eines stabilen Verfahrens der Konsistenzordnung p. Wir setzen

$$r(w) = \left(\frac{1-w}{2}\right)^m \rho\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \quad , \quad s(w) = \left(\frac{1-w}{2}\right)^m \sigma\left(\frac{1+w}{1-w}\right) .$$

Dann hat nach (i) und wegen der Stabilität r bei $w = 0$ eine einfache Nullstelle und sonst nur Nullstellen mit negativem Realteil. Nach (ii) ist r also von der Form

$$r(w) = a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_m w^m$$

mit $a_1 \neq 0$, und a_ℓ hat das Vorzeichen von a_1, $\ell = 2, \ldots, m$. Sei nun weiter

$$f(w) = \left(\frac{1-w}{2}\right)^m \varphi\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \quad , \quad \varphi(z) = \frac{\rho(z)}{\ell n z} - \sigma(z) .$$

Nach Satz 9.6.1 ist die Ordnung p der Nullstelle von f bei 0 gleich der Konsistenzordnung des Verfahrens. Offenbar ist

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{r(w)}{\ell n \frac{1+w}{1-w}} - s(w) \\ &= b_0 + b_1 w + \ldots + b_{p-1} w^{p-1} + \ldots - s(w) \ . \end{aligned}$$

Da s ein Polynom vom Grade m ist, kann f nur dann eine Nullstelle der Ordnung p bei 0 haben, wenn

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_{p-1} = 0$$

ist. Für $m+1 > p-1$ ist diese Bedingung leer. Es ist dann $p \leq m+1$ und der Satz richtig.

Wir berechnen nun die b_ν. Es ist nach (iii)

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 w + \ldots &= \frac{w}{\ell n \frac{1+w}{1-w}} \frac{r(w)}{w} \\ &= (c_0 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + \ldots)(a_1 + a_2 w + \ldots + a_m w^{m-1}) \end{aligned}$$

mit $c_{2\nu} < 0$, $\nu > 0$. Ausmultiplikation und Koeffizientenvergleich für die geraden Potenzen ergibt

$$b_{2\nu} = c_0 a_{2\nu+1} + c_2 a_{2\nu-1} + \ldots + c_{2\nu} a_1 \quad ,$$

wobei wir $a_\nu = 0$ für $\nu > m$ gesetzt haben. Nun unterschreiben wir zwei Fälle.

(a) m ungerade. Wir setzen $2\nu = m+1$ und bekommen

$$b_{m+1} = c_0 a_{m+2} + c_2 a_m + \ldots + c_{m+1} a_1 \quad .$$

Es ist $a_{m+2} = 0$, $c_{2\nu} < 0$, die a_ℓ haben alle das gleiche Vorzeichen, und $a_1 \neq 0$. Also folgt $b_{m+1} \neq 0$, d.h. es muß $p-1 > m+1$ oder $p \leq m+1$ sein.

(b) m gerade. Wir setzen $2\nu = m+2$ und bekommen

$$b_{m+2} = c_0 a_{m+3} + c_2 a_{m+1} + c_4 a_{m-1} + \ldots + c_{m+2} a_1 \; .$$

Wie oben folgt $b_{m+2} \neq 0$, d.h. es muß $p-1 < m+2$ oder $p \leq m+2$ sein.

□

Definition 9.6.1 *Ein m-Schrittverfahren heißt optimal, wenn seine Konsistenzordnung $m+1$ ist für m ungerade und $m+2$ für m gerade.*

Beispiele:

1) Die Verfahren von Adams-Moulton und Milne-Simpson haben die Konsistenzordnung $m+1$ und sind daher für ungerades m optimal.

2) Das Milne-Simpson-Verfahren für $m = 2$, d.h.

$$y_{k+2} - y_k = h(2f_{k+2} - 2\nabla f_{k+2} + \frac{1}{3}\nabla^2 f_{k+2})$$

ist identisch zu dem Verfahren für $m = 3$. Es hat also die Konsistenzordnung $3 + 1 = 4$ und ist daher optimal. Dagegen hat die Mittelpunktsregel

$$y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1}$$

nur die Konsistenzordnung 2 und ist also nicht optimal.