Kapitel 7

Approximation

7.1 Approximation in normierten Räumen

Eine vorgegebene Funktion $f \in C[a,b]$ soll durch eine Funktion u aus einem Unterraum $U \subset C[a,b]$ approximiert werden. Wir untersuchen in diesem Paragraphen, ob es eine optimale Wahl u^* für u gibt.

Wir führen zunächst auf $C[a,b]$ eine Norm $\|\cdot\|$ ein.

Für $1 \leq p < \infty$ ist beispielsweise

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

eine Norm. Einen wichtigen Fall erhält man für $p \to \infty$:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \max_{[a,b]} |f(x)|$$

Wir legen uns im folgenden jedoch auf keine bestimmte Norm fest. Sei U der von den linear unabhängigen Funktionen $u_0, \ldots, u_n \in C[a,b]$ aufgespannte Unterraum:

$$U = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k u_k \ , \ a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

und sei

$$\varepsilon(f) := \ \mathrm{Inf}_{u \in U} \|f - u\| \ .$$

Dann heißt unsere Aufgabe:

Finde $u^* \in U$ mit $\|f - u^*\| = \varepsilon(f)$.

Satz 7.1.1 *Das Approximationsproblem ist immer lösbar.*

Beweis: Für $a := (a_0, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei

$$F(a) = \|f - \sum_{k=0}^{n} a_k u_k\|$$

$F(a)$ ist eine stetige Funktion von a. Bei der Suche nach einem Minimum von F in $\mathbb{R}^{n+1}$ können wir uns auf die Menge $M = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : F(a) \leq F(a)\}$ beschränken. M ist abgeschlossen. M ist auch beschränkt. Denn die Abbildung $a \to \| \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u_k\|$ ist eine Norm in $\mathbb{R}^{n+1}$. Da je zwei Normen in $\mathbb{R}^{n+1}$ äquivalent sind, gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\| \sum_{k=0}^{n} a_k u_k\| \geq c\|a\|_\infty \; .$$

Mit $\|\alpha\|_\infty \to \infty$ strebt also auch $F(a) \to \infty$, und damit ist M beschränkt.

M ist also kompakt, und die stetige Funktion F nimmt auf M ihr Minimum an, etwa in a^*.

Also existiert ein $a^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $F(a^*) = \varepsilon(f)$. $u^* = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^* u_k$ ist dann Lösung des Approximationsproblems.

□

Definition 7.1.1 *Eine Norm heißt strikt, wenn gilt:*

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| \Rightarrow f, g \;\; \textit{linear abhängig}$$

Beispiele: $\| \;\; \|_2$ ist strikt, $\| \;\; \|_\infty$ hingegen nicht. Letzteres sieht man an dem Beispiel $f = 1$, $g = x$ in $C[0, 1]$.

Satz 7.1.2 *Das Approximationsproblem für strikte Normen ist eindeutig lösbar.*

Beweis: Seien u_1^* und u_2^* Lösungen und $u^* := \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*)$. Dann gilt:

$$\|f - u^*\| \leq \frac{1}{2}\|f - u_1^*\| + \frac{1}{2}\|f - u_2^*\| = \varepsilon(f)$$

u^* ist also ebenfalls eine Lösung und in der Ungleichung gilt Gleichheit. Da die Norm streng ist, gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| + \beta| > 0$ und

$$\frac{\alpha}{2}(f - u_1^*) = \frac{\beta}{2}(f - u_2^*)$$

oder

$$(\alpha - \beta)f = \alpha u_1^* - \beta u_2^* \, .$$

Ist $\alpha = \beta$, so folgt $u_1^* = u_2^*$. Ist $\alpha \neq \beta$, so folgt $f \in U$, also $f = u_1^* = u_2^*$. In jedem Fall ist also $u_1^* = u_2^*$.

7.2 Tschebyscheff-Approximation

Wir betrachten im folgenden die Approximationsaufgabe mit der Norm

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$$

Definition 7.2.1 *Seien* $u_0, \ldots, u_n \in C[a,b]$ *linear unabhängig.* $U = \langle u_0, \ldots, u_n \rangle$ *heißt unisolvent, wenn für jede Unterteilung* $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ *und für jede Wahl von* y_j, $j = 0, \ldots, n$ *genau ein* $u^* \in U$ *existiert mit* $u^*(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Bemerkung: U unisolvent $\Leftrightarrow$ det $(u_k(x_j)) \neq 0$ für jede Unterteilung.
$\Leftrightarrow$ Jede Funktion $u \in U$ mit mehr als n Nullstellen verschwindet identisch.

Beispiele:

1) $U = \mathcal{P}_n$.
2) $u_k(x) = e^{\lambda k x}$, $k = 0, \ldots, n$, $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^1$.
   det $(u_k(x_j)) = \left(e^{\lambda x_j}\right)^k = (z_j)^k$ ist gerade die Vandermonde-Determinante von $(z_0, \ldots, z_n)$.
3) $U = \mathcal{T}_m$, $n = 2m+1$ für $0 \le a < b < 2\pi$.
4) $< 1, x^2 >$ ist in $[-1,+1]$ nicht unisolvent.
5) $< B_{0,k}, \ldots, B_{n-k,k} >$ in $[x_0, x_n]$ nicht unisolvent.

Satz 7.2.1 *Sei* U *unisolvent,* $u \in U$ *und* $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \le b$. $(f-u)(x_j)$ *habe alternierende Vorzeichen, d.h. es gebe ein* $\sigma \in \mathbb{R}$ *mit* $|\sigma| = 1$, *so daß*

$$sgn[(f-u)(x_j)] = (-1)^j \sigma , \quad j = 0, \ldots, n+1 .$$

Dann gilt:

$$\min_{j=0}^{n+1} |(f-u)(x_j)| \le \varepsilon(f) \le \|f-u\| .$$

Beweis: Wir nehmen an, es wäre

$$\min_{j=0}^{n+1} |(f-u)(x_j)| > \varepsilon(f) \ .$$

Dann gäbe es ein $v \in U$ mit

$$\min_{j=0}^{n+1} |(f-u)(x_j)| > \|f-v\| \ .$$

Es folgt

$$|(f-u)(x_j)| > |(f-v)(x_j)| \ , \quad j=0,\ldots,n+1 \ .$$

Nun ist aber

$$|(f-u)(x_j)| = (\operatorname{sgn}(f-u)(x_j))(f-u)(x_j) = \sigma(-1)^j(f-u)(x_j) \ ,$$

und es folgt weiter

$$\sigma(-1)^j(f-u)(x_j) > |(f-v)(x_j)| \geq \sigma(-1)^j(f-v)(x_j) \ , \quad j=0,\ldots,n+1 \ .$$

Dies ist nur möglich, wenn

$$\sigma(-1)^j(v-u)(x_j) > 0 \ , \quad j=0,\ldots,n+1 \ .$$

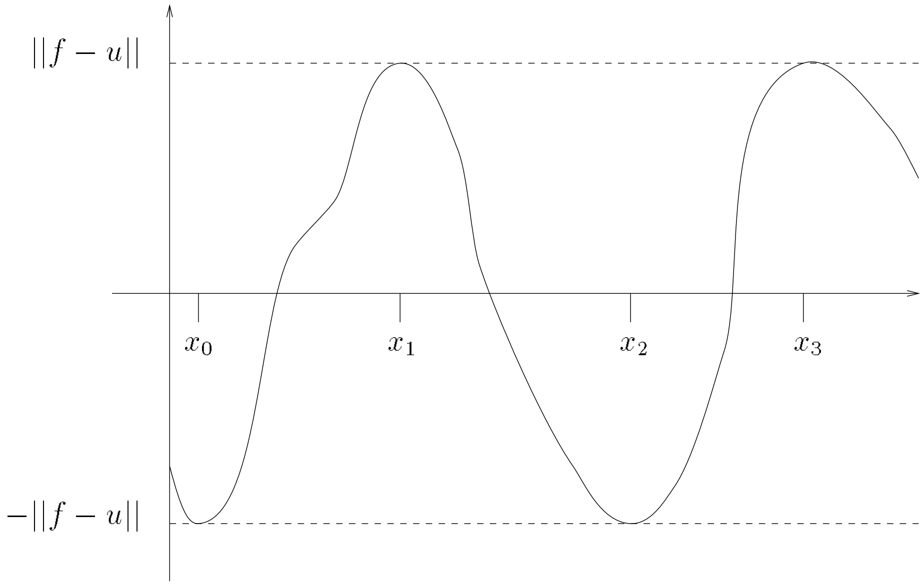
$v-u$ hat also mindestens $n+1$ Nullstellen. Da U unisolvent ist, folgt $v=u$. Dies ist ein Widerspruch.

□

Definition 7.2.2 *$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ heißt Alternante (der Länge $n+2$) zu $f-u$, falls $f-u$ an den Stellen x_j mit alternierendem Vorzeichen seinen Maximalwert annimmt, d.h. es gibt $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|\sigma| = 1$, so daß*

$$(f-u)(x_j) = \sigma(-1)^j\|f-u\|$$

Beispiel: $n = 2$



Satz 7.2.2 *Sei U unisolvent und $u \in U$. $f - u$ besitze eine Alternante der Länge $n+2$. Dann ist u Lösung des Approximationsproblems, d.h. $\|f-u\| = \varepsilon(f)$.*

Beweis: Nach Satz 7.2.1 gilt:

$$\|f-u\| = \min_{j=0}^{n+1} |(f-u)(x_j)| \leq \varepsilon(f) \leq \|f-u\|$$

Bemerkung: Es gilt auch die umgekehrte Behauptung, d.h. zu jeder Lösung gibt es eine Alternante. Der Beweis ist schwieriger (vgl. G. Meinardus, Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung).

Satz 7.2.3 *Sei U unisolvent und $a \leq x_0 < \ldots < x_{n+1} \leq b$. Dann gibt es genau ein $u \in U$ und $d \in \mathbb{R}^1$ mit*

$$u(x_j) = f(x_j) - d(-1)^j \quad , \quad j = 0, \ldots, n+1$$

und es gilt:

$$|d| \leq \varepsilon(f) \leq \|f-u\|$$

Beweis: Sind u, d von der genannten Art, so ist

$$(f-u)(x_j) = d(-1)^j \quad , \quad j = 0, \ldots, n+1$$

und nach Satz 7.2.1 folgt

$$|d| = \min_{j=0}^{n+1} |(f-u)(x_j)| \leq \varepsilon(f) \; .$$

Für d und die Koeffizienten a_k von $u = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k$ hat man die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_k(x_j) + d(-1)^j = f(x_j) \; , \quad j = 0, \ldots, n+1 \; .$$

Das zugehörige homogene System lautet

$$u(x_j) = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k(x_j) = -d(-1)^j \; , \quad j = 0, \ldots, n+1$$

u hat also mindestens $n+1$ Nullstellen.

Da U unisolvent ist, müssen die a_k und damit auch d verschwinden, das homogene System ist also nur trivial lösbar. Damit sind u, d eindeutig bestimmt.

□

Satz 7.2.3 bildet die Grundlage des Remes - Algorithmus zur Lösung der Approximationsaufgabe:

Sei $f \in C[a,b]$ und U unisolvent. Gesucht wird ein $u^* \in U$ mit

$$\|f - u^*\| \leq \|f - u\| \; , \qquad \forall \quad u \in U \; .$$

Wir konstruieren eine Folge von Unterteilungen

$$x^{(k)} = (x_0^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}) \; , \quad a \leq x_0^{(k)} < \ldots < x_{n+1}^{(k)} \leq b$$

und finden die nach Satz 7.2.3 eindeutig bestimmten $u^{(k)}$, $d^{(k)}$ mit

$$\begin{aligned} & u^{(k)}(x_j) = f(x_j^{(k)}) - d^{(k)}(-1)^j \qquad , \qquad j = 0, \ldots, n+1 \; , \\ & |d^{(k)}| \leq \varepsilon(f) \leq \|f - u^{(k)}\| =: \varepsilon^{(k)} \quad . \end{aligned}$$

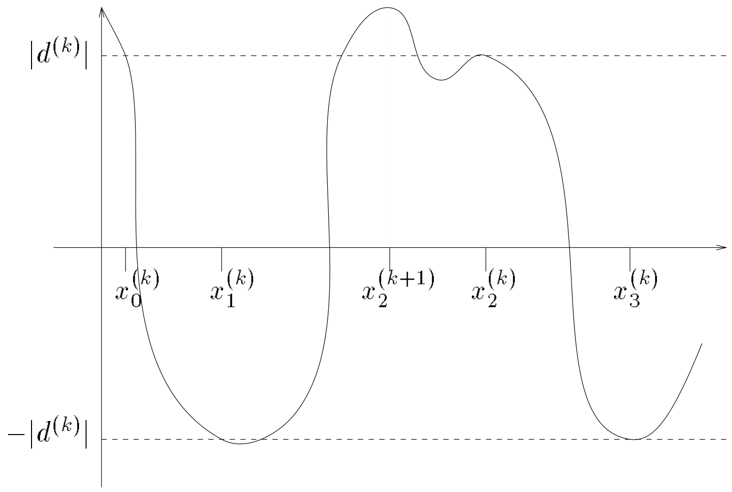
Die Unterteilung $X^{(0)}$ kann beliebig gewählt werden, es ist jedoch ein wichtiges praktisches Problem, ein geeignetes $X^{(0)}$ zu finden.

Sei $X^{(k)}$ berechnet. Falls $|d^{(k)}| = \varepsilon^{(k)}$, so ist $\|f - u^{(k)}\| = \varepsilon(f)$ und das Verfahren kann abgebrochen werden. Für $|d^{(k)}| < \varepsilon^{(k)}$ wird $X^{(k+1)}$ so gewählt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $(f - u^{(k)})(x_j^{(k+1)})$ hat alternierendes Vorzeichen

(b) $|(f - u^{(k)})(x_j^{(k+1)})| \geq |d^{(k)}| \qquad j = 0, \ldots, n+1$

(c) $|(f - u^{(k)})(x_j^{(k+1)})| > |d^{(k)}|$ für mindestens ein j



In dem skizzierten Beispiel sind die Bedingungen (a) bis (c) erfüllt, wenn $x_2^{(k+1)}$ wie eingezeichnet gewählt wird und die übrigen Unterteilungspunkte nicht verändert werden.

Satz 7.2.4 *Sei U unisolvent und seien die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt. Dann gilt*

$$|d^{(k+1)}| > |d^{(k)}| \, .$$

Beweis: Wir entwickeln $u^{(k+1)}$ nach der Basis $\{u_0, \ldots, u_n\}$ von U:

$$u^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(k+1)} u_i$$

Für die Koeffizienten $a_i^{(k+1)}$ und für $d^{(k+1)}$ gelten die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(k+1)} u_i(x_j^{(k+1)}) + d^{(k+1)}(-1)^j = f(x_j^{(k+1)}) , \quad j = 0, \ldots, n+1 .$$

Nach der Cramer'schen Regel gilt für $d^{(k+1)}$:

$$d^{(k+1)} = \frac{\begin{vmatrix} u_0(x_0^{(k+1)}) & \cdots & u_n(x_0^{(k+1)}) & f(x_0^{(k+1)}) - u^{(k)}(x_0^{(k+1)}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(x_{n+1}^{(k+1)}) & \cdots & u_n(x_{n+1}^{(k+1)}) & f(x_{n+1}^{(k+1)}) - u^{(k)}(x_{n+1}^{(k+1)}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_0(x_0^{(k+1)}) & \cdots & u_n(x_0^{(k+1)}) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(x_j^{(k+1)}) & \cdots & u_n(x_j^{(k+1)}) & (-1)^j \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_0(x_{n+1}^{(k+1)}) & \cdots & u_n(x_{n+1}^{(k+1)}) & (-1)^{n+1} \end{vmatrix}}$$

Dabei haben wir im Zähler von der letzten Spalte $\left(u^{(k)}(x_0^{(k+1)}), \ldots, u^{(k)}(x_{n+1}^{(k+1)})\right)^T$ subtrahiert. Dies ändert den Wert der Determinante jedoch nicht, da der subtrahierte Vektor eine Linearkombination der ersten $n+1$ Spalten ist.

Wir entwickeln beide Determinanten nach der letzten Spalte:

$$d^{(k+1)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n+1} (f - u^k)(x_j^{(k+1)})(-1)^{n+1+j} D_j}{\sum\limits_{j=0}^{n+1} (-1)^j (-1)^{n+1+j} D_j}$$

D_j entsteht aus beiden Determinanten durch Streichen der j-ten Zeile und der letzten Spalte.

Sei $\mu_j = D_j / \left(\sum\limits_{i=0}^{n+1} D_i\right)$. Dann gilt:

$$d^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (f - u^{(k)})(x_j^{(k+1)}) \mu_j$$

Wir zeigen nun, daß die μ_j alle streng positiv sind. Da U unisolvent, gilt $D_j \neq 0,\ \ j = 0, \ldots, n+1$. Betrachten wir die Unterteilung $X^{(k+1)}$. D_j hängt stetig von den $x_i^{(k+1)},\ \ i \neq j$ ab. Denken wir uns nun $x_{j-1}^{(k+1)}$ in Richtung von $x_j^{(k+1)}$ verschoben, so nähert sich D_j dem Wert von D_{j-1} stetig an, darf aber für keinen Wert von $x_{j-1}^{(k+1)}$ verschwinden. Daher müssen D_j und D_{j-1} gleiches Vorzeichen haben, woraus folgt, daß alle D_i dasselbe Vorzeichen haben, die μ_i also streng positiv sind.

Aus der Voraussetzung (a) folgt, daß auch das Vorzeichen von $(-1)^j(f-u^k)(x_j^{(k+1)})$ von j unabhängig ist. Damit gilt nach (b), (c)

$$|d^{(k+1)}| = \sum_{j=0}^{n+1} |(f-u^{(k)})|\mu_j > |d^{(k)}| \sum_{j=0}^{n+1} \mu_j = |d^{(k)}| \ ,$$

da $\sum\limits_{j=0}^{n+1} \mu_j = 1$.

$\square$

Wir betrachten nun den Fall der Approximation mit Polynomen n-ten Grades und untersuchen, wir gut bereits das Interpolationspolynom approximiert.

Satz 7.2.5 *Sei $U = \mathcal{P}_n$. Für $u \in U$ gelte $u(x_j) = f(x_j),\ \ j = 0, \ldots, n$, wobei die x_j aus $[a,b]$ und paarweise verschieden seien.*

Dann gilt:

$$\|f-u\| \leq V_n \cdot \varepsilon(f)$$

mit

$$V_n = 1 + \| \sum_{j=0}^{n} |\omega_j(x)\| \ , \ \ \omega_j(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \ .$$

Beweis: Sei L_n der Operator, der eine Funktion in ihr Interpolationspolynom zur Unterteilung $x_0, \ldots, x_n$ überführt. Wir benutzen die Lagrange'sche Form des Interpolationspolynoms und erhalten $u = L_n f = \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j)\omega_j$. Es folgt:

$$\begin{aligned} f - u &= f - u^* + u^* - u \\ &= f - u^* + L_n u^* - L_n f \qquad (\text{da } u^* = L_n u^*) \\ &= f - u^* + L_n(u^* - f) \qquad (\text{da } L_n \text{ linear ist}) \ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} |(f-u)(x)| &\leq |(f-u^*)(x)| + \sum_{j=0}^{n} |(u^*-f)(x_j)| \ \ |\omega_j(x)| \\ &\leq \|f-u^*\| \left(1 + \sum_{j=0}^{n} |\omega_j(x)|\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\|f-u\| \leq \left(1 + \left\|\sum_{j=0}^{n} |\omega_j(x)|\right\|\right) \varepsilon(f) \ .$$

Beispiel: $[a,b] = [-1,+1]$, x_j seien die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x) = \cos(n+1)t$, $x = \cos t$:

$$x_j = \cos\left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\pi\right) \qquad , \quad j = 0, \ldots, n \ .$$

Durch numerisches Rechnen erhält man die folgenden Werte für V_n:

n	V_n
4	3.0
10	3.5
100	4.9

Im für die Praxis interessanten Bereich $n \leq 10$ vergrößert man den Fehler nur um einen Faktor kleiner gleich 3.5, wenn man mit dem Interpolationspolynom an Tschebyscheffstellen approximiert.

7.3 Approximation nach Gauß

Sei H ein unitärer Raum. Wir benutzen die durch das innere Produkt gegebene Norm:

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}$$

Seien $u_0, \dots, u_n \in H$ linear unabhängig und sei $U = < u_0, \dots, u_n >$. Die Approximationsaufgabe lautet dann:

Für gegebenes $f \in H$ wird $u^* \in U$ gesucht mit

$$\|f - u^*\| = \operatorname{Inf}_{u \in U} \|f - u\| \ .$$

Satz 7.3.1 *u^* existiert und ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Existenz von u^* folgt aus Satz 1.1. Die durch das innere Produkt induzierte Norm ist strikt. Aus Satz 1.2 folgt dann die Eindeutigkeit.

Satz 7.3.2 *Es gilt $u^* = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^* u_i$, wobei die Koeffizienten a_i^* durch die Normalgleichungen*

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i^*(u_i, u_k) = (f, u_k) \qquad k = 0, \dots, n$$

bestimmt sind.

Beweis: Wir formen die Normalgleichungen etwas um:

$$\left(u_k \ , \ \sum_{i=0}^{n} a_i^* u_i - f \right) = 0 \qquad k = 0, \dots, n$$

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^* u_i - f$ ist also orthogonal zu U. Für ein beliebiges $u = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i u_i$ gilt:

$$\|f - u\|^2 = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i u_i \right\|^2 = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i^* u_i + \sum_{i=0}^{n} (a_i^* - a_i) u \right\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i^* u_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=0}^{n} (a_i^* a_i) u_i \right\|^2 \\
&\geq \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i^* u_i \right\|^2
\end{aligned}
$$

□

Beispiele:

1) $H = \mathbb{C}^p$

   Die Basisvektoren $u_0, \ldots, u_n$ von U bilden die Matrix $A = (u_0, \ldots, u_n)$. Für $f \in \mathbb{C}^p$ führt die Aufgabe $\|f - Ax\|$ zu minimieren auf ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem, siehe I.1.6.

2) $H = C[-1, 1]$, $U =< 1, t, t^2 >$, $f(t) = e^t$

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

$(u_i, u_k) = \int_{-1}^{1} u_i u_k dt = \int_{-1}^{1} t^{i+k} dt = \frac{1+(-1)^{i+k}}{i+k+1}$

$$
\begin{aligned}
(u_0, f) &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^t dt = e - 1/e \\
(u_1, f) &= \int_{-1}^{1} t e^t dt = 2/e \\
(u_2, f) &= \int_{-1}^{1} t^2 e^t dt = e - 5/e
\end{aligned}
$$

Die Normalgleichungen lauten damit

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - 1/e \\ 2/e \\ e - 5/e \end{pmatrix}
$$

und führen auf

$$\begin{aligned} a_0^* &= 0.99629 \\ a_1^* &= 1.10364 \\ a_2^* &= 0.53672 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\max_{t\in[-1,1]} |(e^t - a_0^* - a_1^* - a_1^* t - a_2^* t^2| = 0.082$$

3) Die Normalgleichungen vereinfachen sich bedeutend, wenn $u_0, \ldots, u_n$ ein Orthonormalsystem bilden:

$$(u_i, u_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt einfach

$$(u_i, u_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt einfach

$$a_k^* = (f, u_k)$$

und

$$u^* = \sum_{i=0}^{n} (f, u_i) u_i \ .$$

Die a_k^* heißen in diesem Fall verallgemeinerte Fourier-Koeffizienten von f bezüglich $u_0, \ldots, u_n$.

4) $H = C[0, 2\pi]$

$(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f\overline{g} dx$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \qquad k = 0\ ,\ \neq 1, \ldots, \neq m\ , n = 2m$$

$$\int_0^{2\pi} u_k u_\ell dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)x} dx = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier sind die $a_k^* = (f, u_k)$ die üblichen Fourier-Koeffizienten.

$$u^* = \sum_{k=-n}^{n} (f, u_k) u_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}$$

heißt endliche Fourier-Reihe von f. Für $n \to \infty$ konvergiert u^* in vielen Fällen gegen f.

5) $\{u_0, \ldots, u_{2m}\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \sin mx\right\}$

$$u^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

heißt ebenfalls Fourier-Reihe. Es gilt

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\{\begin{matrix} \cos kx \\ \sin kx \end{matrix}\right\} f(x)dx$$

Satz 7.3.3 *Seien $u_0, \ldots, u_n$ linear unabhängig. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $v_0, \ldots, v_n$ mit*

$$< u_0, \ldots, u_m >=< v_0, \ldots, v_m > , \quad m = 0, \ldots, n .$$

Beweis: Durch das E. Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren.

□

Sei nun $H = C[a, b]$ und $(f, g) = \int\limits_a^b wfgdx$ mit einer Funktion w, die "Gewichtsfunktion", welche stetig und in (a, b) positiv ist. Ist $u_0 = 1$, $u_1 = x, \ldots, u_n = x^n$, so nennt man die v_m "orthogonale Polynome" (zu (a, b) und w).

Satz 7.3.4 *v_k hat in (a, b) genau k einfache Nullstellen.*

Beweis: $x_1, \ldots, x_m$ seien die Zeichenwechsel von v_k in (a, b). Wir zeigen, daß $m = k$ gilt.

Sei $q = \sum\limits_{i=1}^{m} (x - x_i) \in \mathcal{P}_m$. Dann ist für $m < k$

$$(q, v_k) = \int\limits_a^b wqv_k dx = 0 \ .$$

Die Funktion $q \cdot v_k$ hat konstantes Vorzeichen. Also folgt

$$q \cdot v_k \equiv 0 \quad \text{in} \quad (a, b)$$

und dies ist ein Widerspruch.

$\square$

Bemerkung: Die Nullstellen von v_k trennen die Nullstellen von v_{k+1}.

Satz 7.3.5 *Es gibt Konstanten α_k, β_k, γ_k, so daß $v_{k+1} = (\alpha_k x - \beta_k) v_k - \gamma_k v_{k-1}$.*

Beweis: Wir machen den Ansatz: $\tilde{v}_{k+1} = (x - \beta_k) v_k - \gamma_k v_{k-1}$. Die Konstanten werden so bestimmt, daß v_{k+1} orthogonal zu $v_0, \ldots, v_k$ wird. Für $\ell \leq k - 2$ gilt:

$$(\tilde{v}_{k+1}, v_\ell) = (xv_k, v_\ell) - \beta_k (v_k, v_\ell) - \gamma_k (v_{k-1}, v_\ell) = 0 \ .$$

Dies ist automatisch erfüllt, da $xv_\ell \in \mathcal{P}_{k-1}$.
Für $\ell = k - 1$ und $\ell = k$ erhält man die Gleichungen

$$(xv_k, v_{k-1}) - \gamma_k = 0 \quad , \quad (xv_k, v_k) - \beta_k = 0 \ .$$

Es gibt also β_k, γ_k, so daß $\tilde{v}_{k+1} \perp < v_0, \ldots, v_k >$. v_{k+1} entsteht aus $\tilde{v}_{k+1}$ durch Normieren.

$\square$

Für die Werte der Koeffizienten α_k, β_k, γ_k gibt es Tabellen.

Beispiele: $[a, b] = [-1, +1]$. Für $w = 1$ erhält man $v_k = c_k P_k$ mit den Legendre-Polynomen P_k:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 & P_3 &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_1 &= x & P_4 &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_2 &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{aligned}$$

Bei einer anderen Wahl von $[a, b]$ und w erhält man andere Orthogonalsysteme:

$[a, b]$	w	Bezeichnung
$[-1, +1]$	1	P_k Legendre-Pol.
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{-1/2}$	T_k Tschebyscheff-Pol. 1. Art
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{1/2}$	U_k Tschebyscheff-Pol. 2. Art
$[-1, +1]$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$	$P_k^{(\alpha,\beta)}$ Jacobi-Polynome
$(-\infty, +\infty)$	$e^{-x^2/2}$	H_k Hermite'sche Pol.
$(0, \infty)$	e^{-x}	L_k Laguerre'sche Pol.