Kapitel 2

Lineare Optimierung

2.1 Ein einführendes Beispiel

Wir wenden uns nun einem praxisorientiertes Gebiet der Numerischen Mathematik zu. In der Linearen Optimierung werden lineare Zielfunktionen unter linearen Bedingungen optimiert. Häufig ist dies die Gewinnmaximierung unter gegebenen Einschränkungen durch Produktionskapazität, Lagervorrat und gesetzliche Bestimmungen. Diese Anwendung macht die lineare Optimierung zu einem der wichtigsten mathematischen Methoden in der Betriebswirtschaft. Wir werden sie zunächst informell behandeln. Wir diskutieren das folgende Beispiel:

Ein Chemiekonzern stellt die Chemikalien C_1 und C_2 her. Bei der Produktion fallen die Schadstoffe S_1, S_2 und S_3 an (laut Tabelle). Der maximale Schadstoffausstoß pro Tag ist begrenzt. Erarbeiten Sie einen Produktionsplan, der einen maximalen Gewinn sicherstellt.

Tabelle 1:

	$C_1(^{mg}/\ell)$	$C_2(^{mg}/\ell)$	Höchstgrenze $(^{mg}/d)$
S_1	20	10	8000
S_2	4	5	2000
S_3	6	15	4500
Gewinn DM	16	32	

Wir formulieren die Optimierungsaufgabe wie folgt:

Seien c_1, c_2 die pro Tag von C_1, C_2 produzierten Mengen in Liter. Es muß gelten

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
c_1 & \geq & 0 & & c_1 & \geq & 0 \\
c_2 & \geq & 0 & \text{oder} & c_2 & \geq & 0 \\
20c_1 + 10c_2 & \leq & 8000 & & 8000 - 20c_1 - 10c_2 & \geq & 0 \\
4c_1 + 5c_2 & \leq & 2000 & & 2000 - 4c_1 - 5c_2 & \geq & 0 \\
6c_1 + 15c_2 & \leq & 4500 & & 4500 - 6c_1 - 15c_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

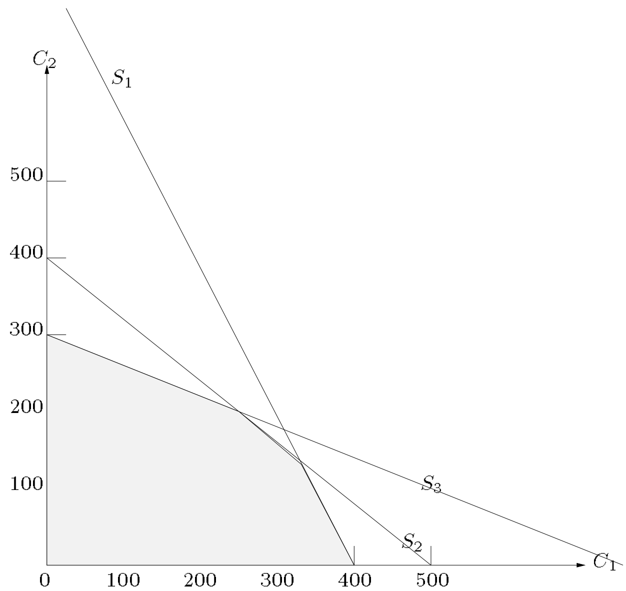
Mit der Definition

$$
c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \\ 4500 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ -4 & -5 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}
$$

muß daher gelten

$$
c \geq 0 \qquad \text{und} \qquad b + Ac \geq 0 \, .
$$

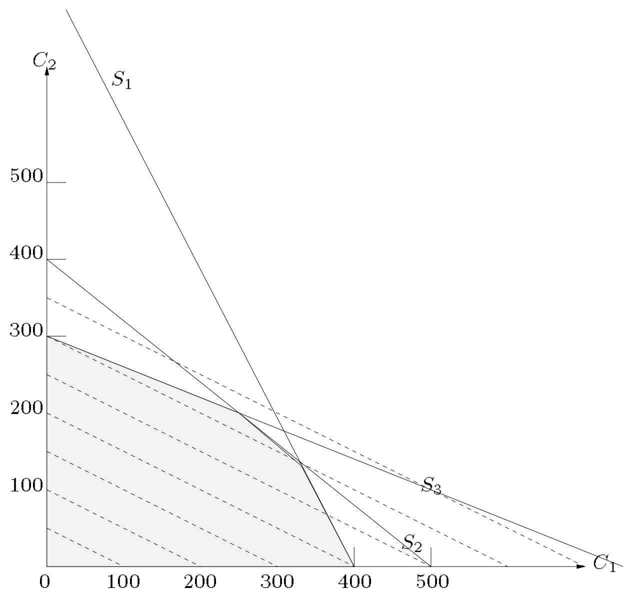
Wir zeichnen den durch diese Ungleichungen bestimmten Lösungsbereich L.



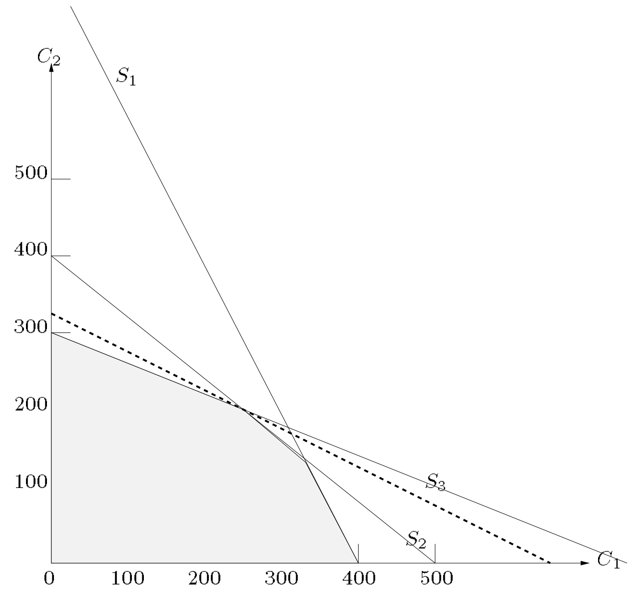
Es gilt: Gewinn (in DM) $= 16c_1 + 32c_2$. Es ist also genau dann möglich, einen Gewinn von g DM zu erzielen, wenn die durch $16c_1 + 32c_2 = g$ bestimmte Gerade $G(g)$ einen Schnittpunkt mit L besitzt.

Wir suchen also den größten Wert von g, so daß $G(g)$ einen Schnittpunkt mit L hat.

Im folgenden Bild ist $G(g)$ für einige Werte von g gezeichnet worden.



Für steigendes g verlagert sich die Linie nach oben. Die höchste Linie, die noch einen Schnittpunkt mit L hat, ist im folgenden gezeichnet:



Wir bestimmen den Schnittpunkt als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4c_1 + 5c_2 &= 2000 \\ 6c_1 + 15c_2 &= 4500 \end{aligned}$$

als $c = (250, 200)$.

Es ist anschaulich, daß es immer eine Ecke von L gibt, in der ein optimales Ergebnis erzielt wird. "Ecken" sind dabei Lösungen eines linearen Gleichungssystems in k Variablen, wenn eine Zielfunktion im $\mathbb{R}^k$ optimiert werden soll.

Wir können daher folgenden einfachen Algorithmus zur Lösung der linearen Optimierungsaufgabe angeben.

Für alle Schnittpunkte von k Ungleichungen:

> Stellen Sie fest, ob der Schnittpunkt zulässig ist (d.h., ob alle Ungleichungen erfüllt sind).
>
> Bestimme unter allen zulässigen Schnittpunkten das Zielfunktionsmaximum.

Zur Bestimmung der Schnittpunkte müssen bei n Ungleichungen $\binom{n}{k}$ Gleichungssysteme der Ordnung k gelöst werden. Da typischerweise n einige tausend, k einige hundert beträgt, ist der Algorithmus nicht durchführbar.

2.2 Die allgemeine lineare Optimierungsaufgabe

Wir wollen nun die allgemeine lineare Optimierungsaufgabe formulieren.

Sei A eine reelle (m,n)-Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$. Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_j \geq 0 \ , \ j = 1, \ldots, n_0 \ , \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \ , \quad i = 1, \ldots, m_0 \ , \tag{2.1}$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \ , \quad i = m_0 + 1, \ldots, m \right\} \ .$$

Die allgemeine lineare Optimierungsaufgabe lautet nun: Minimiere

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} \ c_j x_j \tag{2.2}$$

in M! Man nennt M die Menge der zulässigen Punkte und jedes $x \in M$ zulässig. Die lineare Funktion (2.2) heißt Zielfunktion.

Die Aufgabe (2.1), (2.2) heißt in Normalform, wenn $n_0 = n$ und $m_0 = 0$. Dann kann man M in der Form

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \ , \quad Ax = b\} \tag{2.3}$$

schreiben. Ungleichungen zwischen Vektoren werden hier und unten immer komponentenweise verstanden. Man kann (2.1) immer in der Form (2.3) schreiben. Ist $n_0 < n$, so setzt man

$$x_j = y_j - z_j \quad , \quad j = n_0 + 1, \ldots, n \quad , \quad y_j \ , \ z_j \geq 0 \ .$$

Ist $m_0 > 0$, treten also Ungleichungen auf, so führt man die "Schlupfvariablen"

$$u_i = b_i - \sum_{i=1}^{n} \ a_{ij} x_j \quad , \quad i = 1, \ldots, m_0$$

ein. Dann hat man ein Problem in Normalform mit den nicht negativen Variablen

$$\begin{array}{lll} x_j & , & j = 1, \ldots, n_0 \\ y_j, z_j & , & j = n_0 + 1, \ldots, n \\ u_i & , & i = 1, \ldots, m_0 \end{array}$$

und den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_i + \sum_{j=1}^{n_0} a_{i,j}x_j \quad &+ \quad \sum_{j=n_0+1}^{n} a_{i,j}(y_j - z_j) = b_i \ , \quad i = 1, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^{n_0} a_{i,j}x_j \quad &+ \quad \sum_{j=n_0+1}^{n} a_{i,j}(y_j - z_j) = b_i \ , \quad i = m_0+1, \dots, m \ . \end{aligned}$$

Nun führen wir einige geometrische Begriffe ein.

1) Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn mit $x, y \in U$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ für $0 \leq x \leq 1$, d.h. wenn mit je zwei Punkten deren Verbindungsgerade in U liegt. Z.B. sind die Mengen M aus (2.1), (2.3) konvex.

2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. $x \in U$ heißt Ecke von U, wenn x nicht im Innern einer Verbindungsgeraden zweier Punkte von U liegt. Mit anderen Worten: Es gilt nicht $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ mit $y, z \in U,\ y \neq z,\ 0 < \lambda < 1$.

3) Sind $u_i \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_i \lambda_i = 1$, so heißt $\sum\limits_i \lambda_i u_i$ Konvexkombination der u_i. Die Menge aller Konvexkombinationen heißt konvexe Hülle der u_i.

Von dem einleitenden Beispiel in §1 ist klar, daß die Ecken von M eine besondere Rolle spielen. Wir wollen diese Ecken algebraisch charakterisieren. Im folgenden nehmen wir immer an, daß A den Rang m hat, und für M nehmen wir immer die Normalform (2.3).

Definition 2.2.1 *Sei A eine reelle (m,n)-Matrix. Eine Lösung x von $Ax = b$ heißt Basis-Lösung, wenn es eine Teilmenge I von $\{1, \dots, n\}$ mit genau m Elementen gibt, so daß gilt:*

i) $\quad x_i = 0 \ , \quad i \notin I$

ii) $\quad a_i \ , \ i \in I$ *sind linear unabhängig.*

I heißt Basis von x.

Satz 2.2.1 *$x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Ecke von M, wenn x zulässige Basis-Lösung von $Ax = b$ ist.*

Beweis:

a) Sei x Ecke von M. Sei I die Menge der Indizes i mit $x_i > 0$. Wären a_i, $i \in I$ linear abhängig, so gäbe es Zahlen α_i, $i \in I$ mit

$$\sum_{i \in I} \alpha_i a_i = 0 \ , \quad \sum_{i \in I} |\alpha_i| > 0 \ .$$

Wir könnten die Punkte $x^\pm$ mit den Komponenten

$$\begin{array}{lcll} x_i^\pm & = & x_i \pm \varepsilon \alpha_i & , \quad i \in I \ , \\ x_i^\pm & = & 0 & , \quad i \notin I \end{array}$$

bilden. Es wäre $Ax^\pm = b$ und $x^\pm \geq 0$ für hinreichend kleines ε, also $x^\pm \in M$. Außerdem wäre $x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$. Dies ist nicht möglich, da x Ecke ist. Also sind die a_i, $i \in I$ linear unabhängig. Insbesondere hat I höchstens m Elemente. Hat I weniger als m Elemente, so können wir I zu einer m-elementigen Menge ergänzen. x ist damit zulässige Basis-Lösung mit Basis I.

b) Sei x umgekehrt zulässige Basis-Lösung mit Basis I. Wäre x nicht Ecke, so gäbe es x^1, $x^2 \in M$, $x^1 \neq x^2$, und λ mit $0 < \lambda < 1$, so daß $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$. Für $i \notin I$ müßte dann $x_i^1 = x_i^2 = 0$ sein, und wegen

$$\sum_{i \in I} x_i^1 a_i = \sum_{i \in I} x_i^2 a_i \ .$$

müßte $x_i^1 = x_i^2$ auch für $i \in I$ sein. Im Widerspruch zur Annahme wäre also $x^1 = x^2$.

Satz 2.2.2 *Sei M beschränkt. Dann ist M die konvexe Hülle seiner Ecken.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß jedes $x \in M$ Konvexkombination der Ecken von M ist.

Sei also $x \in M$ und p die Anzahl der positiven Komponenten von x. Wir führen den Beweis durch Induktion nach p.

Ist $p = 0$, so ist x zulässige Basis-Lösung (mit einer beliebigen Wahl von m Basis-Vektoren) und damit selbst Ecke. Sei die Behauptung richtig bis $p - 1$. Ist x Ecke, so sind wir fertig. Andernfalls sind die p Vektoren a_i, $x_i > 0$ linear abhängig, d.h. es gibt $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ mit $Aw = 0$ und $w_i = 0$ für $x_i = 0$. Da M beschränkt ist, muß w sowohl positive als auch negative Komponenten haben. Also kann man t_1, $t_2 > 0$ so finden, daß

$$x^1 = x - t_1 w \quad , \quad x^2 = x + t_2 w$$

jeweils höchstens $p - 1$ positive Komponenten haben und x^1, $x^2 \in M$. Nach Induktionsannahme sind x^1, x^2 Konvexkombinationen der Ecken von M, also auch

$$x = \frac{t_2}{t_1 + t_2} x^1 + \frac{t_1}{t_1 + t_2} x^2 \ .$$

□

Satz 2.2.3 *M sei beschränkt und nicht leer. Dann ist die lineare Optimierungsaufgabe lösbar, und es gibt sogar eine Ecke von M, die Lösung ist.*

Beweis: Die Zielfunktion z nimmt als stetige Funktion auf dem Kompaktum M ihr Minimum an, etwa in $x^0 \in M$. Seien $x^1, \ldots, x^k$ die Ecken von M. Nach Satz II.2.2 ist x Konvexkombination von $x^1, \ldots, x^k$, also

$$x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \quad , \quad \lambda_i \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \ .$$

Wäre nun $z(x^0) < z(x^i)$ für alle i, so wäre

$$z(x^0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z(x^i) < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z(x^0) = z(x^0) \ ,$$

und dies ist ein Widerspruch. Also gibt es ein i mit $z(x^0) = z(x^i)$, und dieses x^i ist Lösung.

□

2.3 Das Simplex-Verfahren: Phase II

Das Simplex-Verfahren ist das Standard-Verfahren zur numerischen Lösung linearer Optimierungsaufgaben. Es wurde gegen Ende des zweiten Weltkriegs von Dantzig entwickelt und zur optimalen Ladungsverteilung von der amerikanischen Marine benutzt. Bei diesen Anwendungen war die Menge M ein Simplex. Wir beschreiben das sogenannte revidierte Simplex-Verfahren, welches für sehr große Probleme besonders geeignet ist.

Wir beschreiben das Verfahren für die Normalform

$$\text{Minimiere} \quad z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ \text{ in } \ M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \ \ , Ax = b\} \tag{3.1}$$

Wie immer soll die (m,n)-Matrix A den Rang m besitzen. Ecken x von M sind dann dadurch gekennzeichnet, daß die Vektoren a_i mit $x_i > 0$ linear unabhängig sind. Natürlich kann es nicht mehr als m solcher Komponenten x_i geben. Sind es genau m, so heißt die Ecke nicht entartet, andernfalls entartet. Für nicht entartete Ecken gibt es immer genau eine Basis $I = \{i : x_i > 0\}$. Diese enthält genau m Elemente, und die Basis-Vektoren a_i, $i \in I$ sind linear unabhängig. Wir wollen annehmen, daß keine Ecke von M entartet ist.

Das Simplex-Verfahren konstruiert eine endliche Folge von Ecken von M mit abnehmenden Werten von z und endet mit einer Lösung oder der Information, daß das Problem nicht lösbar ist. Jede Ecke kann als Anfang dieser Folge gewählt werden. Die Berechnung einer Ausgangsecke von M ist Gegenstand der Phase I des Simplex-Verfahrens. Bei der jetzt zu schildernden Phase II nehmen wir an, wir hätten eine Ecke x^0 bereits gefunden. Es sei I die Basis von x^0 und J die Menge der nicht in I liegenden Indizes oder die Nicht-Basis-Indizes. Es ist also $x_i^0 > 0$ für $i \in I$, $x_j^0 = 0$ für $j \in J$, und $a_{i,i \in I}$, sind linear unabhängig. Wir können $Ax = b$ nach den Basis-Variablen x_i, $i \in I$ auflösen und erhalten

$$z = z(x^0) + \sum_{j \in J} p_j x_j \tag{3.2}$$

$$x_i = x_i^0 + \sum_{j \in J} c_{i,j} x_j \quad , \quad i \in I\ . \tag{3.3}$$

Ist $A_I = (a_i)_{i \in I}$, $A_J = (a_j)_{j \in J}$, so gilt für die $(m, n-m)$-Matrix $C = (c_{ij})_{i \in I, j \in J}$

$$C = A_I^{-1} A_J\ . \tag{3.4}$$

Die Koeffizienten von (3.2)-(3.3) fassen wir ins Simplex-Tableau der Ecke x^0 zusammen:

		J
	$z(x^0)$	p_j
I	x_i^0	$c_{i,j}$

(3.5)

Nun kommt die Beschreibung des Simplex-Schrittes, welcher die Ecke x^0 in eine neue Ecke x^1 mit kleinerem Wert der Zielfunktion überführt. Er besteht aus folgenden Teilschritten:

1. Suche $j_0 \in J$ mit $p_{j_0} < 0$.

Gibt es kein solches, so ist $p_j \geq 0$ für alle $j \in J$ und damit nach (3.2) $z(x) \geq z(x_0)$ für alle $x \in M$. Also ist x^0 bereits Lösung und das Verfahren beendet.

2. Suche nach einem $i_0 \in I$ mit $c_{i_0,j_0} < 0$ und

$$\frac{x_{i_0}^0}{-c_{i_0,j_0}} \leq \frac{x_i^0}{-c_{i,j_0}} \quad \text{für alle} \quad i \in I \ \text{ mit } \ c_{i,j_0} < 0 \ .$$

Gibt es kein solches i_0, so ist $c_{i,j_0} \geq 0$ für alle $i \in I$, und der Punkt $x(t) = x^0 + te_{j_0}$ ist wegen (3.3) zulässig für alle $t \geq 0$, während wegen (2.2) $z(x(t)) \to -\infty$ für $t \to +\infty$. Also ist z nach unten nicht beschränkt auf M, die Optimierungsaufgabe unlösbar, und das Verfahren beendet.

3. Konstruktion der neuen Ecke x^1.

Gibt es $i \in I$ mit $c_{i,j_0} < 0$, so ist wegen (3.3) $x(t) = x^0 + te_{j_0} \in M$ genau für $x_i(t) = x_i^0 + tc_{i,j_0} \geq 0$ für alle diese i, d.h. für

$$t \leq \frac{x_i^0}{-c_{i,j_0}} \quad \text{für } \ i \in I \ \text{ mit } \ c_{i,j_0} < 0 \ .$$

Nach Wahl von i_0 ist $t_0 = x_{i_0}^0/(-c_{i_0,j_0})$ das größte t mit dieser Eigenschaft. Wir setzen

$$x^1 = x(t_0) = x^0 + t_0 e_{j_0} \ .$$

Es ist

$$\begin{array}{rcl} z(x^1) & = & z(x^0) + t_0 p_{j_0} < z(x^0) \ , \\ x_{i_0}^1 & = & 0 \quad , \quad x_{j_0}^1 = t_0 > 0 \ . \end{array}$$

Wir zeigen, daß x^1 eine Ecke mit Basis $I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ ist, d.h. daß die Vektoren $a_i, \ \ i \in I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ linear unabhängig sind. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es Zahlen $\alpha_i, \ \ i \in I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$\sum_{i \in I - \{i_0\}} \alpha_i a_i + \alpha_{j_0} a_{j_0} = 0 \ .$$

Nach (3.4) ist $A_I C = A_J$. Die j_0-te Spalte hiervon lautet

$$\sum_{i \in I} c_{i,j_0} a_i = a_{j_0} \ .$$

Damit haben wir zwei Darstellungen von a_{j_0} durch die linear unabhängigen Vektoren $a_i, \ i \in I$. In der ersten verschwindet der Koeffizient von a_{i_0}, in der zweiten ist er $c_{i_0,j_0} \neq 0$. Dieser Widerspruch zeigt, daß die a_i mit $i \in I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ linear unabhängig sind und damit x^1 eine Ecke mit der Basis $I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ ist.

4. Berechnung des neuen Tableaus.

Dazu löst man $Ax = b$ oder (3.3) nach den neuen Basis-Variablen $x_i, \ i \in I \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$ auf. Aus der Gleichung (3.3) für $i = i_0$ erhalten wir zunächst

$$x_{j_0} = (x_{i_0} - x_{i_0}^0 - \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} c_{i_0,j} x_j)/c_{i_0,j_0}$$

und dann aus den restlichen Gleichungen von (3.3)

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i_0}^0 + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} c_{i,j} x_j + c_{i,j_0} x_{j_0} \\ &= x_{i_0}^0 + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} c_{i,j} x_j + \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} \left(x_{i_0} - x_{i_0}^0 - \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} c_{i_0,j} x_j \right) \\ &= x_{i_0}^0 - \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} x_{i_0}^0 + \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} x_{i_0} + \sum_{j \in J - \{j_0\}} \left(c_{i,j} - \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} c_{i_0,j} \right) x_j \end{aligned}$$

für $i \in I\backslash\{i_0\}$. Auch die Zielfunktion muß in den neuen Nicht-Basis-Variablen ausgedrückt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} z &= z(x^0) + \sum_{j\in J\backslash\{j_0\}} p_j x_j + p_{j_0} x_{j_0} \\ &= z(x^0) - \frac{p_{j_0}}{c_{i_0,j_0}} x^0_{i_0} + \sum_{j\in J\backslash\{j_0\}} \left(p_j - \frac{p_{j_0}}{c_{i_0,j_0}} c_{i_0,j}\right) x_j \ . \end{aligned}$$

Das (i_0, j_0)-Element im Simplex-Tableau heißt Pivotelement, die zugehörige Zeile bzw. Spalte Pivotzeile bzw. Pivotspalte. Das Simplex-Tableau für x^1 hat die Form

		$j \in J \setminus \{j_0\}$	i_0
	$z(x^0) - \frac{p_{j_0}}{c_{i_0,j_0}} x^0_{i_0}$	$p_j - \frac{p_{j_0}}{c_{i_0,j_0}} c_{i_0,j}$	$\frac{p_{j_0}}{c_{i_0,j_0}}$
$i \in I \setminus \{i_0\}$	$x^0_{i_0} - \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} x^0_{i_0}$	$c_{i,j} - \frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}} c_{i_0,j}$	$\frac{c_{i,j_0}}{c_{i_0,j_0}}$
j_0	$-\frac{x^0_{i_0}}{c_{i_0,j_0}}$	$-\frac{c_{i_0,j}}{c_{i_0,j_0}}$	$\frac{1}{c_{i_0,j_0}}$

Dabei schreibt man die neue Zeile j_0 (Spalte i_0) zweckmäßigerweise in die alte Zeile i_0 (Spalte j_0).

Sind, wie vorausgesetzt, alle Ecken von M nicht entartet, so ist $t_0 > 0$, und die Zielfunktion nimmt bei jedem Schritt echt ab. Das Simplex-Verfahren bricht also nach endlich vielen Schritten ab, entweder mit der Lösung, oder mit der Aussage, daß z auf M nicht nach unten beschränkt ist.

Wir schreiben nun ein Programm, das den Übergang von einem Tableau zum nächsten bewerkstelligt. Wir werden sehen, daß das ganze Tableau, also auch erste Spalte und Zeile, einheitlich behandelt werden können. Deshalb nehmen wir das Tableau in der Form

$$\begin{array}{c|ccc} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,q} \\ \hline c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,0} & c_{m,1} & \cdots & c_{m,q} \end{array}$$

an mit $q = n - m$. Die Zeilenindizes $1, \ldots, m$ entsprechen also den Basis-Indizes $i_1, \ldots, i_n$, die Spaltenindizes $1, \ldots, q$ den Nicht-Basis-Indizes $j_1, \ldots, j_q$.

austausch (C, i_0, j_0, m, q)

/ $\star$ Berechnet nach Bestimmung von i_0, j_0 das neue Tableau.
Schreibt den neuen Basis-Index j_{j_0} in Zeile i_0 und den
neuen Nicht-Basis-Index i_{i_0} in die Spalte j_0 / $\star$

{ $c_{i_0,j_0} = 1/c_{i_0,j_0}$;
for $i = 0, \ldots, m$ if $(i \neq i_0) c_{i,j_0} = c_{i,j_0} * c_{i_0,j_0}$;
for $i = 0, \ldots, m$ for $j = 0, \ldots, q$
if $(i \neq i_0$ und $j \neq j_0)$ $c_{i,j} = c_{i,j} - c_{i,j_0} * c_{i_0,j}$;
for $j = 0, \ldots, q$ if $(j \neq j_0)$ $c_{i_0,j} = -c_{i_0,j} * c_{i_0,j_0}$;
}

Der Austauschschritt benötigt $qm+$ $\mathrm{O}(m+q)$ flops.

Mit Hilfe der Austauschroutine kann man nun leicht ein Programm für die Phase II des Simplex-Verfahrens schreiben:

simplex (C, I, J, m, q)

/ $\star$ Bei Aufruf enthält C das Tableau der Ausgangs-Ecke, I die Basis-,
J die Nicht-Basis-Indizes. Nach Ablauf steht das Minimum der
Zielfunktion in $c_{0,0}$, die Lösung in $c_{i,0}$, $i = 1, \ldots, m$
und die Basis-Indizes der Lösung in I / $\star$

```
{   while      (∃ j ∈ {1,...,q} : c_{0,j} < 0)
            {  Wähle j_0;
               Wähle i_0 ∈ {1,...,m}, so daß c_{i,0}/(−c_{i,j_0}) minimal für
               i = i_0 unter allen i mit c_{i,j_0} < 0;
               breche ab mit Meldung "Problem nicht lösbar"
               falls es keine solchen i gibt;
               I = I \ {i_{i_0}} ∪ {j_{j_0}}; J = J \ {j_{j_0}} ∪ {i_{i_0}};
               austausch (C, i_0, j_0, m, q);
            }
}
```

Der Austauschschritt kann auch zum Invertieren von Matrizen benutzt werden. Sei C eine $(n+1,n+1)$-Matrix und $y = Cx$, also

$$\begin{array}{lcllll} y_0 & = & c_{0,0}x_0 & + \cdots + & c_{0,n}x_n & \\ \vdots & & & & & \\ y_n & = & c_{n,0}x_0 & + \cdots + & c_{n,n}x_n & . \end{array}$$

Wir lösen die nullte Gleichung nach x_0 auf und setzen x_0 in die restlichen Gleichungen ein. Es entsteht

$$\begin{array}{lcllllll} x_0 & = & c'_{0,0}y_0 & + & c'_{0,1}x_1 & + \cdots + & c'_{0,n}x_n \\ y_1 & = & c'_{1,0}y_0 & + & c'_{1,1}x_1 & + \cdots + & c'_{1,n}x_n \\ \vdots & & & & & & \\ y_n & = & c'_{n,0}y_0 & + & c'_{n,1}x_1 & + \cdots + & c'_{n,n}x_n \end{array}$$

mit neuen Elementen $c'_{i,j}$, die wir durch den Aufruf

$$\text{austausch } (C, 0, 0, n, n)$$

berechnen können (falls $c_{0,0} \neq 0$). Danach lösen wir die erste Gleichung nach x_1 auf und setzen x_1 in die restlichen Gleichungen ein. Dann sind x_0, x_1, $y_2, \ldots, y_n$ durch y_0, y_1, $x_2, \ldots, x_n$ ausgedrückt. So fortführend können wir schließlich $x_0, \ldots, x_n$ durch $y_0, \ldots, y_n$ ausdrücken. Die Koeffizienten dieser Formeln sind dann gerade die Elemente von C^{-1}. Das Programm

```
for i = 0,...,n
austausch (C, i, i, n, n)
```

invertiert also C. Das geht natürlich nur gut, wenn alle Pivotelemente $\neq 0$ sind.

2.4 Das Simplex-Verfahren: Phase I

Die in §3 beschriebene Phase II des Simplex-Verfahrens setzt voraus, daß wir eine Ecke x^0 von M kennen. Eine solche Ecke liefert uns die Phase I. Dabei nehmen wir wieder an, daß M in der Normalform

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\ , \quad Ax = b\}$$

vorliegt mit einer (m,n)-Matrix A. Wir können zusätzlich $b \geq 0$ annehmen.

Wir führen nun ein Hilfsproblem in den $n+m$ Variablen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ ein. Seine zulässige Menge ist

$$\tilde{M} = \{x, y : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ x, y \geq 0,\ Ax + y = b\}\ ,$$

und seine Zielfunktion

$$\tilde{z}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} y_i\ .$$

Wir zeigen nun: M ist nicht leer genau dann, wenn das Hilfsproblem eine Lösung mit $y = 0$ besitzt. Ist nämlich $x \in M$, so ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung des Hilfsproblems. Ist umgekehrt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung des Hilfsproblems, so ist $x \in M$.

Das Hilfsproblem ist - für $b > 0$ - genau von der Form, die wir für die Phase II vorausgesetzt haben. Eine Ecke von $\tilde{M}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, die zugehörigen Basis-Variablen sind $y = b - Ax$, und die Zielfunktion ist

$$\tilde{z}(x,y) = e^*(b - Ax)\ , \qquad e^* = (1, \dots, 1)\ .$$

Man kann nun die Phase II des Simplex-Verfahrens für das Hilfsproblem durchführen. Endet dies mit einer Lösung mit $y = 0$, so hat man eine Startecke von M gefunden. Andernfalls ist M leer.