Kapitel 10

Numerik partieller Differentialgleichungen

10.1 Anfangswertaufgaben partieller Differentialgleichungen

Treten in einer Differentialgleichung Ableitungen nach mehr als einer Variablen auf, so spricht man von partieller Differentialgleichung. Bei den Anfangswertaufgaben spielt eine dieser Variablen die Rolle der Zeit. Wir bezeichnen sie daher mit t.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$u_t = Au \qquad \text{in} \quad [a,b] \times [0,\infty)$$

für die vektorwertige Funktion $u = (u_1, \ldots, u_m)^T, \;\; u_i = u_i(x,t)$. A ist der Differentialausdruck r-ter Ordnung

$$Au = \sum_{\rho=0}^{r} A_\rho(x) \frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho} u$$

der Ordnung r mit (m,m)-Matrizen $A(x)$. Zur eindeutigen Festlegung von u gehört noch eine Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad , \qquad a \le x \le b$$

und unter Umständen, in Abhängigkeit von A, Randbedingungen am Rande von $[a, b]$, also Bedingungen für die Funktion

$$u(a,t) \quad , \quad u(b,t) \quad , \qquad t \geq 0 \ .$$

Dies ist die Anfangswertaufgabe oder auch Anfangsrandwertaufgabe.

Beispiele:

1) $u_t = u_x \ , \ x \in \mathbb{R}^1$.

Die Gleichung verlangt, daß u entlang der Geraden $t + x = C$ konstant ist. Also ist

$$u(x,t) = u(x+t, 0) = u_0(x+t)$$

die Lösung der Anfangswertaufgabe.

2) $u_t = Du_{xx}, \ \ 0 \leq x \leq 1$. Dies ist die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung. Sie beschreibt die Temperatur $u(x,t)$ eines Stabes der Länge 1 an der Stelle x zur Zeit t; $u_0(x)$ ist demgemäß die Temperatur zur Zeit 0. Als Randbedingungen kommen z.B. in Frage

$$\begin{array}{llcl} u(0,t) \ , & u(1,t) & = & 0 \ \ \text{(Enden gekühlt)} \\ u_x(0,t) \ , & u_x(1,t) & = & 0 \ \ \text{(Enden wärmeisoliert).} \end{array}$$

Die exakte Lösung für die ersten Randbedingungen ist

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \hat{u}_\ell \sin(\ell\pi x) e^{-\pi^2 \ell^2 t D} \ , \\ \hat{u}_\ell & = & 2 \int\limits_0^1 u_0(x) \sin \ell\pi x dx \ , \end{array}$$

vgl. Satz 5.6.1.

3) $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ \ 0 \leq x \leq 1$. Dies ist die Wellengleichung. Sie beschreibt die Auslenkung $u(x,t)$ zur Zeit t an der Stelle x einer schwingenden Saite der Länge 1. Zur eindeutigen Festlegung von u braucht man demgemäß die Auslenkung zur Zeit 0 sowie die Geschwindigkeit zur Zeit 0, also

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \ .$$

Als Randbedingung tritt etwa auf

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \text{(Enden fest eingespannt)} \ .$$

Die exakte Lösung unter diesen Randbedingungen ist

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (\hat{u}_{0\ell} \cos(c\ell\pi t) + \hat{u}_{1\ell} \sin(c\ell\pi t)) \sin \ell\pi x \ , \\
\hat{u}_0 &= 2\int_0^1 u_0(x) \sin(\ell\pi x) dx \ , \\
\hat{u}_1 &= \frac{2}{c\ell\pi} \int_0^1 u_1(x) \sin(\ell\pi x) dx \ , \quad \ell > 0 \ .
\end{aligned}$$

Man kann dieses Problem in unser Schema einordnen, wenn man $v_1 = u_x$, $v_2 = u_t$ setzt. Man erhält dann das System

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_x \quad , \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} (x,0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \end{pmatrix} \ .$$

4) Allgemeiner betrachten wir das hyperbolische System 1. Ordnung

$$u_t + Au_x = 0 \quad , \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

mit einer konstanten (m,m)-Matrix A, welche m verschieden reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ hat. Dann ist $A = Y^{-1}JY$ mit

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \ , \quad y_i(A - \lambda_i I) = 0 \ .$$

Mit $v = Yu$ entsteht

$$v_t + Jv_x = 0 \ .$$

Dies ist ein zerfallendes System von m Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} v_i = 0 \ .$$

Entlang der Geraden $x = \lambda_i t + C$ ist v_i konstant, denn es ist

$$\frac{d}{dt} v_i(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} v_i(x,t) + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} v_i(x,t) = 0 \quad .$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist nun wie in Beispiel 1 möglich: Für jeden Punkt (x_0, t_0) der x-ten Ebene bestimmt man die Gerade $x = \lambda_i t_0 + C$, welche durch diesen Punkt geht (es ist diejenige mit $x_0 = \lambda_i t_0 + C$) und sucht deren Schnittpunkt mit $t = 0$ (dies ist in $x = C = x_0 - \lambda_i t_0$). Dann ist

$$v_i(x_0, t_0) = v_i(x_0 - \lambda_i t_0, 0)$$

und dies ist aus der Anfangsbedingung bekannt.

Die Geraden $x = \lambda_i t + C$ nennt man Charakteristiken. Man sieht, daß $u(x_0, t_0)$ nur von den Anfangswerten $u_0(x_0 - \lambda_i t_0)$, $i = 1, \ldots, m$ abhängt. Man nennt daher das Intervall $[\min(x_0 - \lambda_i t_0), \max(x_0 - \lambda_i t_0)]$ das Abhängigkeitsgebiet von (x_0, t_0).

Für die Wellengleichung haben wir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}$ und damit $\lambda_{1,2} = \pm c$. Die Charakteristiken sind also Geraden mit der Steigung $\pm \frac{1}{c}$. Das Abhängigkeitsgebiet von (x_0, t_0) ist $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Eine Störung, die zur Zeit 0 bei x_1 ist, hat also zur Zeit $t_0 = (x_1 - x_0)/c$ den Punkt x_0 erreicht. c hat also die Bedeutung einer Ausbreitungsgeschwindigkeit.

10.2 Einfachste Differenzenverfahren

Wir beginnen mit der Anfangswertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung.

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \quad , \qquad 0 \le x \le 1 \\ &u(x,0) = u_0(x) \ , \\ &u(t,0) = u(t,1) = 0 \ , \quad t \ge 0 \ . \end{aligned}$$

Wir führen ein Gitter

$$t_\ell = \ell \Delta t \quad , \quad \ell = 0, 1, \ldots \quad , \quad x_k = kh \ , \quad k = 0, \ldots, n \ , \quad h = \frac{1}{n}$$

ein und suchen für $u_k, t_\ell)$ eine Näherung $u_{k,\ell}$, welche die der Differentialgleichung analoge Differenzengleichung

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{k,\ell+1} - u_{k,\ell}) = \frac{1}{h^2}(u_{k+1,\ell} - 2u_{k,\ell} + u_{k-1,\ell}) \ ,$$

$$k = 1, \ldots, n-1 \quad , \quad \ell = 0, 1, \ldots$$

erfüllt. Dazu kommen noch die Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u_{k0} = u_0(x_k) \quad , \quad k = 0, \ldots, n \\ &u_{0\ell} = u_{n\ell} = 0 \quad , \quad \ell = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned}$$

Die Differenzengleichungen können nach $u_{k,\ell+1}$ aufgelöst werden. Mit $\lambda = \Delta t / h^2$ gilt

$$u_{k,\ell+1} = \lambda(u_{k+1,\ell} + u_{k-1,\ell}) + (1 - 2\lambda) u_{k,\ell} \ .$$

Sind also die Werte für die Zeit t_ℓ bekannt, so kann man sie für die Zeit $t_{\ell+1}$ berechnen. Für t_0 sind sie durch die Anfangswertbedingungen gegeben.

Als Beispiel führen wir die Rechnung durch für die Anfangswerte

$$u_{k,0} = \begin{cases} 1 \ , & k = K \ , \quad K+1 \\ 0 \ , & \text{sonst} \qquad . \end{cases}$$

Dies entspricht einem Stab, der zur Zeit 0 in $[x_K, x_{K+1}]$ erhitzt und sonst überall kalt ist. Die Rechnung muß also die zeitliche Entwicklung eines solchen "hot spot" zeigen.

(a) $\lambda = \frac{1}{2}$, d.h. $u_{k,\ell+1} = \frac{1}{2}(u_{k+1,\ell} + u_{k-1,\ell})$.

$\ell = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\ell = 2$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\ell = 1$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\ell = 0$				1		1			
				K		$K+1$			

(b) $\lambda = 1$, d.h. $u_{k,\ell+1} = u_{k+1,\ell} + u_{k-1,\ell} - u_{k,\ell}$

$\ell = 3$	1	-2	3	-1		-1	3	-2	1
$\ell = 2$		1	-1	1		1	-1	1	
$\ell = 1$			1	0		0	1		
$\ell = 0$				1		1			
				K		$K+1$			

Während (a) plausibel erscheint, ist (b) offenbar Unsinn. Wir sehen, daß der Erfolg der Rechnung ganz entscheiden von λ abhängt.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \quad , \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(x,0) &= u_0(x) \, , \\ u_t(x,1) &= u_1(x) \, , \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung wird im Punkt (x_k, t_ℓ) durch die Differenzengleichung

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}(u_{k,\ell+1} - 2u_{k,\ell} + u_{k,\ell-1}) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{k+1,\ell} - 2u_{k,\ell} + u_{k-1,\ell}$$

ersetzt. Der Fehler dieser Diskretisierung ist $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$. Um diese Fehlerordnung auch bei der Diskretisierung von $u_t = u_1$ zu haben, führt man ein Zeitniveau t_{-1} ein und kann dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u_{k,1} - u_{k,-1}) &= u_1(x_k) \quad , \\ u_{k,0} &= u_0(x_k) \end{aligned}$$

setzen. Die Differenzengleichung wird dann für $\ell = 0, 1, \ldots$ benutzt. Man kann sie nach $u_{k,\ell+1}$ auflösen und erhält

$$u_{k,\ell+1} = (u_{k+1,\ell} + u_{k-1,\ell}) + 2(1-\lambda)u_{k,\ell} - u_{k,\ell-1} \ .$$

Das Zeitniveau -1 wird in der Gleichung für $\ell = 0$ durch die Anfangsbedingung eliminiert, die entstehende Gleichung kann nach $u_{k,1}$ aufgelöst werden.

Schließlich betrachten wir noch die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_x \quad , \quad x \in \mathbb{R}^1 \\ u(x,0) &= u_0(x) \ . \end{aligned}$$

Es sind hier drei Differenzenverfahren gleichermaßen natürlich:

(a) $\frac{1}{\Delta t}(u_{k,\ell+1} - u_{k,\ell}) = \frac{1}{h}(u_{k,\ell} - u_{k-1,\ell})$

(b) $\frac{1}{\Delta t}(u_{k,\ell+1} - u_{k,\ell}) = \frac{1}{h}(u_{k+1,\ell} - u_{k,\ell})$

(c) $\frac{1}{\Delta t}(u_{k,\ell+1} - u_{k,\ell}) = \frac{1}{2h}(u_{k+1,\ell} - u_{k-1,\ell})$

Auflösen nach $u_{k,\ell+1}$ ergibt mit $\lambda = \Delta t / \Delta x$

(a) $u_{k,\ell+1} = (1+\lambda)u_{k,\ell} - \lambda u_{k-1,\ell}$

(b) $u_{k,\ell+1} = (1-\lambda)u_{k,\ell} + \lambda u_{k+1,\ell}$

(c) $u_{k,\ell+1} = u_{k,\ell}) + \frac{\lambda}{2}(u_{k+1,\ell} - u_{k-1,\ell})$.

Wir werden sehen, daß sich diese Verfahren vollkommen unterschiedlich verhalten.