Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 1, Abgabe: Fr., 28.04.95, 11.00 Uhr

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Überlegen Sie, daß die folgenden Ausdrücke Normen für V sind und entscheiden Sie dann, welche dieser Normen streng sind.

$$(a) \qquad V = C^1[a,b]\ ;\ \|f\| = \int_0^1 f'(x)^2 dx + \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

$$(b) \qquad V = C^2[a,b]\ ;\ \|f\| = \int_a^b f''(x)^2 dx + |f(a)| + |f(b)|$$

$$(c) \qquad V = C^n[a,b]\ ;\ \|f\| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f^{(k)}(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

$$(d) \qquad V = \{(x_k)_{k \in I\!N} \mid x_1 = 0\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| < \infty\}\ ;$$

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß der Raum $C[a,b]$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_2$ oder $\|\cdot\|_1$ *nicht* vollständig ist. Untersuchen Sie dazu die Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in I\!N_+}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{für} \quad -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{für} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)

(a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung des Interpolationspolynoms $P_n(x)$ vom Grade n zu den Interpolationsbedingungen $P_n(x_j) = y_j,\ j = 0, \ldots, n$. Benutzen Sie die Newton'sche Interpolationsformel und berechnen Sie den Wert $P_n(x)$ für $x \in I\!R$ mit dem Hornerschema.

Betrachten Sie dann die Funktion von RUNGE

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}\ , \qquad -1 \le x \le 1\ .$$

Bestimmen Sie für $n = 5,\ 10,\ 20$ das Polynom $P_n(x)$ zu den Werten $y_j = f(x_j)$ in den *äquidistanten Knoten*

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n} \quad , \quad j = 0, \ldots, n,$$

und berechnen Sie jeweils

$$\|P_n - f\|_\infty \approx \max_{j = 0, \ldots, 40} \left\{ |P_n(z_j) - f(z_j)| \mid z_j = -1 + \frac{j}{20} \right\}$$

(b) Schreiben Sie ein Programm zur kubischen Spline-Interpolation mit Hermite-Endbedingungen (Fall (17.5)(b) auf Seite 17.9):

$$\begin{array}{rcl} s_n(x_j) & = & y_j \quad , \quad j = 0, \ldots, n \ , \\ s_n'(x_0) & = & y_0' \quad , \quad s_n'(x_n) = y_n \ . \end{array}$$

Berechnen Sie für die RUNGE - Funktion $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ mit $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$, $y_j = f(x_j)$, $y_0' = f'(-1)$, $y_n' = f'(1)$, den Fehler

$$\|s_n - f\|_\infty \approx \max_{j = 0, \ldots, 40} \left\{ |s_n(z_j) - f(z_j)| \mid z_j = -1 + \frac{j}{20} \right\}$$

für $n = 5,\ 10,\ 20$.

Abgabe der Programmieraufgabe: 5.5.95

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 2, Abgabe: 05.05.95, 11.00 Uhr

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Betrachten Sie in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ die Teilmenge

$$T = \{u \in C[0,1] \mid u(0) = 0\} \ .$$

Zeigen Sie, daß die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n(x) = x^n$, eine Minimalfolge für das Element v mit $v(x) \equiv 1$ ist, welche nicht gegen ein Element aus T konvergiert.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

(a) In dem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ sei $B = \{u \in V \mid \|u\| \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Man zeige, daß ein Proximum $\tilde{u} \in B$ an ein Element $v \in V$ gegeben ist durch

$$\tilde{u} = \left\{ \begin{array}{ccc} v & , & \text{falls} \quad v \in B \\ v/\|v\| & , & \text{falls} \quad v \notin B \ . \end{array} \right\}$$

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit der Norm $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$. Skizzieren Sie $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \le 1\}$ und bestimmen Sie alle Proxima $\tilde{x} \in B$ an $v = (2,0)$ und $v = (1,1)$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
In $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ sei die Folge

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{1 + n^4 x^2} \right)^{1/2}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß die Folge im Mittel gegen $f(x) \equiv 0$ konvergiert; jedoch konvergiert sie nicht punktweise.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 3, Abgabe: 12.05.95, 11.00 Uhr

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei $f \in C[-1,1]$, $f(x) = e^x$. Man bestimme die Proxima an f aus Π_k, $0 \leq k \leq 2$, bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$

(a) über die Normalgleichungen;

(b) durch Entwickeln von f nach LEGENDRE-Polynomen.

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Die periodische Funktion $f \in C(I\!R)$ sei definiert durch periodische Fortsetzung von $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Berechnen Sie die FOURIER-Entwicklung von f und skizzieren Sie den Verlauf der Proxima (19.7) aus span (u_0, u_1, u_2) und span $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(b) Berechnen Sie das Proximum an f aus span $(1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x))$ bezüglich der durch das innere Produkt

$$(f,g) := \sum_{k=1}^{6} f(x_k)g(x_k)\ , \quad x_k = (k-1)\frac{2\pi}{6}$$

induzierten Norm auf $I\!R^6$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis in (a).

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Matrizen

(a) $A = uv^T, \quad u, v \in I\!R^n,$

(b) $Q = I - 2ww^T, \quad w^T w = 1, \quad w \in I\!R^n,$

(c)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte λ_i und die Vielfachheiten $\sigma(\lambda_i)$ und $\rho(\lambda_i)$ des charakteristischen Polynoms $\varphi(\lambda)$.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Sei A eine reelle symmetrische (n,n)-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und den Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in I\!R^n$, $x_i^T x_k = \delta_{ik}$.

Man zeige:

$$\lambda_j = \max_{y \in I\!R^n} \{ y^T A y \mid y^T y = 1 \, , \; x_i^T y = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, j-1 \}$$

Übungen zur Vorlesung “Numerische Mathematik II”

Übungsblatt 4, Abgabe: 19.05.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Bei der Berechnung der Grundfrequenzen und Schwingungsformen eines linearen Schwingungssystems der Form (Bild 1), stellt sich die Aufgabe der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Potenzmethode 4 Iterationen zur Bestimmung des größten Eigenwertes von A.

(b) Bestimmen Sie für $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 11$ den größten Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor der Matrix A. Benutzen Sie a) zur Berechnung einer Näherung und vergleichen Sie die Resultate. Erklären Sie insbesondere die schlechte Konvergenz des Eigenvektors.

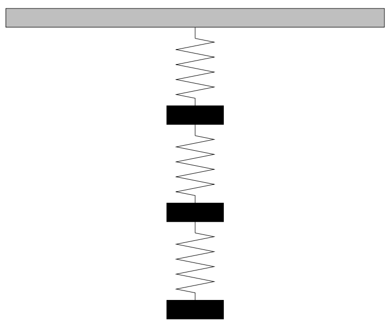

Bild 1

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Berechnen Sie für die Hessenberg-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

einen Schritt der Methode von HYMAN (Seite 22.7) ausgehend vom Startwert $\lambda = 3$.

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 16 & -104 \\ 0 & 2 & -12 & 42 \\ 0 & 9 & -16 & 105 \\ 1 & -2 & 13 & -42 \end{pmatrix} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie die ersten 4 Näherungen für den größten Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor nach der Potenzmethode.

(b) Benutzen Sie die inverse Potenzmethode zur Berechnung des zweitgrößten Eigenwertes mit zugehörigem Eigenvektor.

Verwenden Sie $\mu = 10$ und $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 5, Abgabe: 26.05.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $-\lambda$ Eigenwert von B ist:

$$B := \begin{pmatrix} -\delta_1 & \gamma_2 & & & \mathbf{O} \\ \gamma_2 & -\delta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ \mathbf{O} & & & \gamma_n & -\delta_n \end{pmatrix}$$

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die Rekursion 22.4).

(b) Für die Matrix A gelte

$$\begin{aligned} \delta_i &= -\delta_{n+1-i} \qquad && (i = 1, \ldots, n)\ , \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} && (i = 2, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Mit λ ist auch $-\lambda$ Eigenwert von A.

(c) Für die Matrix A gelte

$$\begin{aligned} \delta_i + \delta_{n+1-i} &= 2c \quad , \quad c \in I\!R \qquad && (i = 1, \ldots, n)\ , \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i} \quad , && (i = 2, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Was kann man über die Lage der Eigenwerte von A aussagen?

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Rechnen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ohne Shift.

(b) mit Shift $\quad s = s_1 = 1.$

Terme "höherer Ordnung" dürfen vernachlässigt werden, z.B. $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2}$ für $|x|$ klein.

(c) Vergleichen Sie in einer Tabelle die exakten Eigenwerte mit den approximierten Eigenwerten aus (a) und (b) für $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Sei A eine symmetrische (n,n)-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(a) Zeigen Sie: Für jeden Vektor $x \in I\!R^n$ und jede Zahl $\lambda \in I\!R$ gilt die Abschätzung

$$\min_{1 \le i \le n} |\lambda_i - \lambda| \le \frac{\|Ax - \lambda x\|_2}{\|x\|_2} .$$

(b) Wenden Sie die Abschätzung in (a) an auf die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und $x = (0.9, 1.0, 1.1)^T$, $\lambda = 12$.

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe) Man berechne sämtliche Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren x_i der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & & & \mathbf{O} \\ 1 & 12 & 1 & & \\ & 1 & 8 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \mathbf{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der in §22.2 dargelegten Methode und dem Verfahren von MAEHLY (§12).
<u>Hinweis:</u> Nach Aufgabe 13 liegen die Eigenwerte symmetrisch zu $\lambda_3 = 8$.

Abgabe der Programmieraufgabe: Fr., 2.6.95

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 6, Abgabe: 02.06.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Es sei bekannt, daß b einem maximalen relativen Fehler von 1% in der $\|\cdot\|_2$–Norm unterliegt. Geben Sie mit Hilfe des Satzes von GERSCHGORIN eine möglichst gute Abschätzung für den Fehler in x.

Aufgabe 18: (6 Punkte)
Gegeben sei die (n, n)-Matrix

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{O} & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

und die (n, n)-Matrix F.

Zeigen Sie: Für die Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ der gestörten Matrix $C(\lambda) + \varepsilon F$ gilt für genügend kleines ε die Abschätzung

$$|\lambda_i(\varepsilon) - \lambda| \leq |\varepsilon^{1/n}|(1 + \|F\|_\infty) \, .$$

Zeigen Sie durch spezielle Wahl der Matrix F, daß der Fall $\lambda_i(\varepsilon) - \lambda = O(\varepsilon^{1/n})$ tatsächlich auftritt.

Hinweis: Ähnlichkeitstransformation mit $D = \text{diag}\ (1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{(n-1)})$, $\delta = \varepsilon^{1/n}$. Benutzen Sie den Satz von GERSCHGORIN.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

(a) nach der zusammengesetzten Trapezregel mit $h = \pi/8$,

(b) nach der zusammengesetzten Simpsonregel mit $h = \pi/8$.

Geben Sie jeweils eine Fehlerabschätzung an.

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 7, Abgabe: **23.06.1995**, 11.00 Uhr

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Es ist
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi = 3.14159\ldots\ .$$
Bestimmen Sie π näherungsweise, indem Sie für das angegebene Integral 3 Romberg-Schritte ausführen (Schrittweiten $h_i = \frac{1}{2^i}$, $i = 0, 1, 2, 3$).

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Es soll die Zahl e mittels eines Extrapolationsverfahrens näherungsweise berechnet werden.

(a) Man zeige:
$$T(h) := (1+h)^{1/h}\ , \quad h \neq 0\ , \quad |h| < 1\ ,$$
besitzt eine für alle $|h| < 1$ konvergente Entwicklung
$$T(h) = e + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h^i\ .$$
Hinweis: $T(h) = e^{\varphi(h)}$, $\varphi(h)$ geeignete Funktion.

(b) Welche Vorteile bietet die Entwicklung von
$$\tilde{T}(h) := \frac{1}{2}(T(h) + T(-h))\ ?$$

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ soll durch die Differenzenquotienten

(a) $T(h) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$

(b) $T(h) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h))$

berechnet werden. Bestimmen Sie $f'(1)$ nach (a) und (b) für $f(x) = e^x$ mittels Extrapolation zu den Schrittweiten $h_0 = 0.2$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$.

Aufgabe 23: (4 Punkte)
(Trennung der Variablen)
Die AWA
$$y' = f(x)g(y)\ , \qquad y(x_0) = y_0$$

mit stetigen Funktionen f, g kann gelöst werden durch Integration der formalen Beziehung $dy/g(y) = f(x)dx$:

$$\int_{y_0} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0} f(x)dx \qquad (g(y_0) \neq 0)\ .$$

Berechnen Sie hiermit die Lösung der folgenden AWA unter Angabe des maximalen Existenzintervalls.

(a) $y' = ky^2 \ , \quad y(0) = y_0 \qquad (k > 0)$

(b) $y' = \frac{2x}{y+yx^2} \ , \quad y(2) = 3$

Aufgabe 24: (Programmieraufgabe) Schreiben Sie ein Programm

$$\text{romberg}\ (f, a, b, relerr)$$

zur Romberg-Integration einer Funktion f in $[a, b]$. Das Programm soll abbrechen, wenn in der letzten Zeile zweimal hintereinander gilt $|T_{i,k} - T_{i,k-1}|\ /\ T_{ik} \leq relerr$. Es sollen $k = 4$ Spalten und mindestens $i = 4$ und höchstens $i = 10$ Zeilen des Romberg-Schemas berechnet werden. Ihr Programm soll mit der minimalen Zahl von Funktionsauswertungen auskommen. Testen Sie Ihr Programm an den Beispielen ($relerr \leq 10^{-5}$):

(a) $$\int_0^{\pi/2} 5(e^{\pi} - 2)^{-1} e^{2x} \cos x dx = 1 \qquad (\pi \approx 3.1415926)$$

(b) $$\int_1^2 \frac{dx}{(x + 0.05)^4} = 0.249254224$$

(c) $$\int_0^1 \frac{dx}{(x + 0.05)^4} = 2666.379$$

(d) $$\int_0^1 x^{3/2} dx = 0.4$$

(Versuchen Sie hier, die schlechten Ergebnisse zu erklären.)

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 8, Abgabe: 30.06.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die Lösung der AWA

$$y' = x + y \ , \quad y(0) = 1$$

ist $y(x) = 2e^x - (1+x)$. Berechnen sie Näherungswerte für $y(1)$ mit dem EULER-Verfahren zu den Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Extrapolieren Sie diese Näherungswerte mit dem Extrapolationsverfahren aus §27 mit $\gamma = 1$.

Aufgabe 26: (6 Punkte)
Ein Runge-Kutta-Verfahren m-ter Stufe für die AWA

$$y' = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0$$

lautet

$$\begin{aligned} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + h\Phi(x_i, \eta_i, h) \ , \qquad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, h) &= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i \\ k_1 &= f(x, y) \\ k_i &= f\left(x + \alpha_i h, \ \sum_{\ell=1}^{i-1} \beta_{i\ell} k_\ell\right) \ , \qquad i = 2, \dots, m \\ \alpha_i &= \sum_{\ell=1}^{i-1} \beta_{i\ell} \ . \end{aligned}$$

(a) Welche Verfahren ergeben sich für $m = 1$, $\gamma_1 = 1$ bzw. für $m = 2$, $\beta_{21} = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$?

(b) Zeigen Sie: Das Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung $p = 1$, falls $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$.

(c) Welche Bedingungen für α_i, $\beta_{i\ell}$, γ_i müssen zusätzlich gelten, damit das Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung $p = 2$ hat?

Aufgabe 27: (Programmieraufgabe) Die Lösung $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ der AWA

$$(*) \qquad y'(x) = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \in I\!R^n$$

soll im Intervall x_0, x_e in den Punkten

$$\begin{aligned} x_i &:= x_0 + i \cdot h \ , \quad i = 1, \ldots, m \ , \\ h &:= (x_e - x_0)/m \end{aligned}$$

berechnet werden.

Das zugehörige Hauptprogramm soll die beiden folgenden Unterprogramme benutzen:

(1) $f(n, x, y, dy)$:

- x: unabhängige Variable,
- y: n-Vektor der abhängigen Variablen,
- dy: Feld der Länge n;
  dy enthält bei Verlassen der Routine die Werte $f(x, y)$ der rechten Seite der Dgl. $(*)$

(2) integ (n, x, h, y):

- x: unabhängige Variable,
- h: Schrittweite,
- y: n-Vektor der abhängigen Variablen;
  y enthält beim Aufruf der Routine den Wert der Lösung im Punkte x und beim Verlassen den Wert der Lösung im Punkte $x + h$.

Im Unterprogramm integ soll das Unterprogramm f aufgerufen werden.

integ: bedeutet <u>wahlweise</u> das

(a) EULER-Verfahren (30.2),

(b) das modifizierte EULER-Verfahren (30.8),

(c) das RUNGE-KUTTA-Verfahren (30.9).

Man teste das Programm an der AWA $y' = 1$, $y(0) = 0$, $n = 1$, auf seine Richtigkeit. Dann integriere man die folgenden AWA'n:

<u>AWA 1:</u>

$$\begin{aligned} y' &= x + y \ , & y(0) &= 1 \ , \\ x_0 &= 0. \ , & x_e &= 1. \ , \quad m = 1, 2, 4, 8 \end{aligned}$$

exakte Lösung: $y(x) = 2e^x - (1 + x)$.

<u>AWA 2:</u> <u>Räuber-Beute-Modell:</u>
(SCHWARZ, Seite 386)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10x(1 - y) \ , & x(0) &= 3 \\ \dot{y} &= y(x - 1) \ , & y(0) &= 1 \\ t_0 &= 0. \ , & t_e &= 5. \ , \quad m = 20, 50, 100 \end{aligned}$$

Man ermittle eine Schätzung für die Periode $T_0 > 0$.

AWA 3: Modell für Nervenimpulse:

(vgl. Skizze auf Seite 4)

Es bedeuten:

$x(t)$: Membranpotential

$y(t)$: Aktivierbarkeit der Nervenzelle

Die zugehörige AWA lautet:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3(y + x - x^3/3 - 1.3) \quad , \quad x(0) = -1.03 \\ \dot{y} & = & -(x - 0.7 + 0.8y)/3 \quad , \quad y(0) = 2.16 \\ t_0 & = & 0. \quad , \quad t_e = 30. \quad , \quad m = 60 \end{array}$$

Literatur: R. Seydel, R. Bulirsch,
Vom Regenbogen zum Farbfernsehen (1986),
Springer Verlag.

Freiwillige Aufgabe:

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen, die man durch Verwendung kommerzieller Pakete erhält (z.B. IMSL, NAG, MAPLE, Mathematica). Nutzen Sie auch jeweils die grafischen Möglichkeiten.

Abgabe der Programmieraufgabe: Fr., 07.07.95

Klausurtermin: Dienstag, 11.07.95, $15^{oo} - 18^{oo}$ Uhr, M 1

Erlaubte Hilfsmittel: - Vorlesungsskripten Numerik I + II (in fest gebundener Form) - Taschenrechner

Übungen zur Vorlesung "Numerische Mathematik II"

Übungsblatt 9, Abgabe: 07.07.1995, 11.00 Uhr

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Man gebe mittels Taylor-Entwicklung ein Einschritt-Verfahren p-ter Ordnung an für die AWA $y' = x + y$, $y(0) = 1$. Wie groß muß man $p \in \mathbb{N}_+$ wählen, damit $y(0.2)$ auf 4 Dezimalziffern korrekt berechnet wird bei Anwendung eines Schrittes mit $x_0 = 0$, $h = 0.2$.

Aufgabe 29: (6 Punkte)
Es sei $\eta(x, h)$ die Näherungslösung, die das Euler-Verfahren für die AWA $y' = y$, $y(0) = 1$ liefert.

(a) Zeigen Sie $\eta(x, h) = (1 + h)^{x/h}$ und prüfen Sie die Konvergenz des Verfahrens.

(Hinweis: Halten Sie h zunächst fest und beweisen Sie die obige Gleichung durch Induktion über n, wobei $x = n \cdot h$. Halten Sie dann zum Beweis der Konvergenz x fest!)

(b) Zeigen Sie, daß η bei festem x eine für $|h| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\eta(x, h) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(x) h^i$$

besitzt mit von h unabhängigen Funktionen $\tau_i(x)$.

(c) Berechnen Sie $\tau_0(x)$, $\tau_1(x)$.

Aufgabe 30: (5 Punkte)
Die Lösungen z_j der Differenzengleichung

$$z_{j+2} = z_{j+1} + z_j \quad (j \geq 0)\ , \quad z_0 = 0\ , z_1 = 1$$

sind die FIBONACCI-Zahlen.

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $z_{j+2} = z_{j+1} + z_j$ durch den Ansatz $z_j = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j$, c_1, c_2, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie dann die spezielle Lösung mit $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.

(b) Die Kapazität eines Informationskanals ist gegeben durch

$$C = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{j} \log z_j\ .$$

Berechnen Sie C.

Klausurtermin: Dienstag, 11.07.95, $15^{oo} - 18^{oo}$ Uhr, M 1

Erlaubte Hilfsmittel: - Vorlesungsskripten Numerik I + II (in fest gebundener Form) - Taschenrechner