Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Vorklausur

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie, dass die Gaußsche Integrationsformel $G_n p = \int_a^b w(x)p(x)dx$ für alle Polynome $\in P_{2n-1}$ exakt ist.
2. Warum gibt es keine Formel G_n, die in P_{2n} exakt ist?

Aufgabe 2:
Führen Sie zwei Jacobi-Iterationen für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus, und bestimmen Sie drei paarweise disjunkte Gerschgorin-Kreisscheiben, die je einen Eigenwert von A enthalten.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie Stützstellen x_1, x_2 und Gewichte A_1, A_2, so dass die Gauß-Cryer-Bronstering Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \simeq A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

für $f \in P_3$ exakt ist.

Aufgabe 4:

(a) Sei $x = (4,3)^T \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Householder Matrix H, so daß

$$Hx = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

(b) Sei

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens (mit Hilfe der Householder- Matrizen) aus.

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(x) = 1 - y^2,\ y(0) = 1$$

(b) Geben Sie den maximalen Existenzbereich $[0, d)$, $d \leq \infty$, der Lösung an.

(c) Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 6:
Welche Bedingungen müssen a_3, a_0, b_2, b_1 erfüllen, damit das lineare Mehrschnittverfahren

$$a_3 y_{i+3} - a_0 y_i = h(b_2 f_{i+2} + b_1 f_{i+1})$$

die Ordnung 2 besitzt?

Aufgabe 7:
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine knappe Begründung.

(a) Die QR-Transformation läßt symmetrische Matrizen symmetrisch.

(b) Sei $f \in C[-1,1], If := \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx, I_n f := \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i) =$ die Newton-Cotes-Formel zu n äquidistanten Stützstellen in $[-1,1]$, dann $I_n f \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} If$.

(c) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum, dann gibt es genau eine Bestapproximation $u \in U$ zu x.

(d) Es gibt genau ein explizites Einschrittverfahren 2. Ordnung.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie zu $x(t) = 1 + t^5$, $0 \leq t \leq 1$, eine Bestapproximation $u \in \text{Span } \{1, t\}$

(a) in $L^2(0,1)$

(b) in $C(0,1)$

Aufgabe 9:

(a) Definieren Sie die Begriffe *Konsistenz*, *Stabilität* und *Konvergenz* für ein lineares r-Schrittverfahren (ϱ, σ).

(b) Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\varrho(z) = \sum_{i=0}^{r} a_i z^i$ mit $|\xi| = 1$. Zeigen Sie, daß $y_k = \xi^k$ eine Lösung der Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{r} a_i y_{i+k} = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß wenn (ϱ, σ) ein konvergentes Verfahren und $\varrho(\xi) = 0$ für ein $\xi \in \mathbb{C}$, dann folgt $|\xi| \leq 1$.

Aufgabe 10:
Zeigen Sie, dass das Einschrittverfahren zur Lösung von $y' = f(x, y)$,

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2} f(x_i, y_i^h))$$

die Ordnung 2 hat.

Aufgabe 11:
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es seien $Ax = b$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ beliebig, und $\{x^{(k)}\}$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + b,$$

$k \geq 0$. Zeigen Sie, dass $x^{(k)} \to x$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 12:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$, und $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Vektornorm $|| \cdot ||_\Delta$ gibt, so dass

$$||A||_\Delta := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\Delta}{||x||_\Delta} < \rho(A) + \epsilon.$$