Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 8 , Abgabe: 22.06.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Es werde das durch

$$\eta_{j+2} + a_1\eta_{j+1} + a_0\eta_j = h[b_0 f(x_j, \eta_j) + b_1 f(x_{j+1}, \eta_{j+1})]$$

gegebene Prediktor-Verfahren betrachtet.

1. Man bestimme a_0, b_0 und b_1 in Abhängigkeit von a_1 so, daß man ein Verfahren mindestens 2. Ordnung erhält.
2. Für welche a_1-Werte ist das so gewonnene Verfahren stabil?
3. Welche speziellen Verfahren erhält man für $a_1 = 0$ und $a_1 = -1$?
4. Läßt sich a_1 so wählen, daß man ein stabiles Verfahren 3. Ordnung bekommt ?

In Aufgaben 29 bis 31 betrachte man die Milne Methode (ein lineares Mehrschrittverfahren):

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n). \tag{1}$$

Aufgabe 29: (2 Punkte)
Überprüfen Sie ob die Milne Methode

1. stabil
2. konsistent

ist.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Ordnung der Milne Methode.

Aufgabe 31: (6 Punkte)
Für die Gleichung

$$y' = Ay$$

nimmt die Milne Methode die einfachere Form an

$$y_{n+2} - y_n = \frac{hA}{3}(y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n). \tag{2}$$

Seien ξ_1 und ξ_2 die Nullstellen von $\rho(z) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von (2)

$$y_n^h = a_1(\lambda_1(h))^n + a_2(\lambda_2(h))^n \tag{3}$$

ist, wobei a_1 und a_2 beliebige Konstanten sind, und $\lambda_1(h)$ und $\lambda_2(h)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\rho(\lambda) - hA\sigma(\lambda) = 0$$

sind.

2. Bestimmen Sie $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda_1(h) \;=\; \xi_1(1 + \mu_1 h) + O(h^2) \tag{4}$$
$$\lambda_2(h) \;=\; \xi_2(1 + \mu_2 h) + O(h^2) \tag{5}$$

3. Zeigen Sie, mit Hilfe von (3),(4) und (5), dass

$$y_n^h \approx a_1 e^{Ax_n} + a_2(-1)^n e^{-(Ax_n)/3}$$

mit $x_n := nh$.