Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 7 , Abgabe: 08.06.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 25: (4 Punkte)

$$\rho(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k$$

erfülle

1. $\alpha_0 \neq 0$
2. $\alpha_k \in \mathbb{Z}$
3. Alle Wurzeln ζ von ρ erfüllen die Bedingung $|\zeta| \leq 1$.

Zeigen Sie, daß alle Wurzeln von ρ Einheitswurzeln sind, d.h. für jede Wurzel von ρ gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^M = 1$. (Dieser Satz wird Kronecker zugewiesen.)

Aufgabe 26: (4 Punkte)
In der Vorlesung, und im Skript, wird das 3-Schritt Adams-Bashforth Verfahren hergeleitet. Bestimmen Sie auf ähnlicher Weise das 3-Schritt Adams-Moulton Verfahren.

Aufgabe 27: (3+3+3+10 Punkte)
Betrachten Sie das vereinfachte Hase-Luchs System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

oder, kurz,

$$\dot{x} = f(x). \tag{2}$$

1. Bestimmen Sie den nicht trivialen Ruhepunkt $x^{(0)}$.
2. In der Nähe von $x^{(0)}$ kann die Gleichung (1) linearisiert werden:

   $$\dot{y} = F(x^{(0)})y \tag{3}$$

   wo $x(t) = x^{(0)} + y(t)$ und $F(x)$ die Jacobi-Matrix zu $f(x)$ ist. Bestimmen Sie die Gleichung (3).
3. Mit dem Ansatz

   $$y(t) = A\begin{pmatrix} sin\ \alpha t \\ cos\ \alpha t \end{pmatrix},$$

$A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$, bestimmen Sie die Lösung von (3) mit der Anfangsbedingung:

$$y(0) = y^{(0)} := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T. \tag{4}$$

Was ist die Periode dieser Lösung ?

4. **Abgabe: 15.06.2000**
Implementieren Sie das klassische Runge-Kutta Verfahren 4-ter Ordnung und benutzen Sie es, um die periodische Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x^{(0)} + y^{(0)} \end{aligned}$$

zu berechnen. Bestimmen Sie die Periode mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.