Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 18.05.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 12: (2 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & \frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie den Satz von Gerschgorin für A und A^T. Bestimmen Sie damit die beste Abschätzung der Eigenwerte von A.

Aufgabe 13: (7 Punkte)

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass $e = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert. (1 Punkt)

2. Berechnen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms $\chi(A)$ die restlichen Eigenwerte und -vektoren. (2 Punkte)

3. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren von A mit
   (a) Matlab, (2 Punkte)
   (b) Mathematica. (2 Punkte)

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Sei $A = xy^H$, wobei x und y Vektoren aus $\mathbb{C}^n$ sind, mit $x \neq 0 \neq y$. Zeigen Sie:

1. A besitzt höchstens einen von Null verschiedenen Eigenwert λ_1 mit algebraischer Vielfachheit 1. (2 Punkte)

2. $\lambda_1 = y^H x$. (1 Punkt)

3. x ist rechter und y ist linker Eigenvektor zu $\lambda_1 = y^H x$. (1 Punkt)

4. Welche geometrische Vielfachheit besitzt der Eigenwert $\lambda_2 = 0$? (1 Punkt)

Aufgabe 15: (5 Punkte)

1. A sei eine $n \times n$ reelle symmetrische Matrix, L eine normierte linke Dreiecksmatrix, D eine Diagonalmatrix, und

$$A = LDL^T.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der negativen Eigenwerte von A gleich die Anzahl der negativen Eigenwerte von D ist.
(Hinweis: Sylvesterscher Trägheitssatz)

2. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LDL^T Zerlegung von $A - \mu I$ für verschiedene $\mu \in \mathbb{Z}$, und bestimme dadurch $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$, so dass

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \mu_3$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind.