Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 3 , Abgabe: 11.05.00 , 13.00 Uhr

Die Gauß-Hermitesche Formel für $n = 2$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= 0,886227, \\ x_1 = -x_2 &= 0,707107 \end{aligned}$$

und $p_2(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

1. Approximieren Sie mit der Formel (1) das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2}\, dx.$$
2. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler mit Hilfe der entsprechenden Fehlerformel an. (Skript Satz 3.4 (3))
3. Ermitteln Sie den exakten Fehler. Der exakten Wert des Integrals ist $\Gamma(7/2)$.

Aufgabe 10: (5 Punkte)
Betrachten Sie die Integrationsformel nach Gauß

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{m} a_k f(y_k) + \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k), \tag{2}$$

wobei die Abszissen y_k vorab fest vorgeschrieben sind. Die $m + 2n$ Konstanten a_k, ω_k und x_k sind so zu bestimmen, dass (2) exakt ist für Polynome mit Grad $m + 2n - 1$. Betrachten Sie die Polynome

$$\begin{aligned} r(x) &= (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m), \\ s(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \end{aligned}$$

Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Regel (2) ist exakt für alle Polynome mit Grad $\leq m + 2n - 1$ genau dann, wenn

1. sie ist exakt für alle Polynome mit Grad $\leq m+n-1$,
2. $\int_a^b \omega(x)r(x)s(x)p(x)\,dx = 0$ für jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n-1$.

Programmieraufgabe 11: Abgabe 18.05.00 (10 Punkte)
Benutzen Sie die zusammengesetzte Simpson-Regel mit $2m+1$ äquidistanten Stützpunkten $x_0, \cdots, x_{2m}$ mit $h_m = \frac{b-a}{2m}$, für $m = 2^{k-1}$, $1 \leq k \leq 10$, um das Integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\arctan 4$$

zu approximieren. Geben Sie folgendes ab:

1. Eine Auflistung Ihres Programmes,
2. Eine Tabelle des Fehlers $F_m = I - I_2^{NC,m}$
3. Einen Graph, z.B. mit gnuplot, von m gegenüber F_m/h_m^5.

Führen Sie die Berechnungen mit doppelter Genauigkeit (double) aus.