Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

# Numerische Mathematik II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 04.05.00 , 13.00 Uhr

---

Sei $-\infty < a < b < +\infty$, $\omega(x) \in C[a,b]$, $\omega(x) > 0$ für $x \in (a,b)$. Sei für $f, g \in C[a,b]$,

$$(f,g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

$$\|f\| := (f,f)^{1/2},$$

Sei $\{\pi_0, \pi_1, ...\}$ ein Orthogonalsystem:

1. $\pi_k \in \mathbb{P}_k, \quad k \in \mathbb{N}$,
2. $(\pi_j, \pi_k) = \delta_{jk}$ (Kronecker Symbol).

Für $f \in C[a,b]$ werden die FOURIER-Koeffizienten definiert.

$$c_k := (f, \pi_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie folgende:

**Aufgabe 5:** (5 Punkte)
TOEPLER: Sei

$$U(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \pi_k(x).$$

Das Integral

$$F(U) := \|U - f\|^2 = \int_a^b \omega(x) |U(x) - f(x)|^2 dx$$

wird durch (den Abschnitt der FOURIER-Reihe von $f(x)$)

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k(x),$$

minimiert. Das Minimum hat den Wert

$$F(s_n) = \|s_n - f\|^2 = (f,f) - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

**Aufgabe 6:** (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$$

konvergiert und die (BESSELSCHE) Ungleichung erfüllt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2$$

**Aufgabe 7:** (4 Punkte)
Zeigen Sie, eventuell mit Hilfe des Satzes von WEIERSTRASS, dass (die PARSEVALSCHE-Gleichung) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)
Benutzen Sie die Methode von Nyström und die Gaußschen Integrationsformel

$$\int_{-1}^{+1} g(s)ds \doteq g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

um die Integralgleichung von LOVE

$$f(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(s)}{1+(s-t)^2}ds = 1, \qquad -1 \leq t \leq 1$$

numerisch zu approximieren (d. h. $f$ in den Punkten

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

approximieren).