Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 1 , Abgabe: 20.04.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$

$$If = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

   (a) mit der geschlossenen Formel von Newton-Cotes

$$I_n^{NC} f = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

   ($n + 1$ gleichverteilte Stützstellen $x_k = -1 + k\frac{2}{n}$, $0 \leq k \leq n$).

   (b) mit der Formel von Gauß-Legendre für $w(x) = 1$

$$G_n f = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

   (Hinweis: Die Stützstellen $x_k^{(n)}$ und Gewichte $A_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq n$, findet man für kleine n in vielen Numerik-Büchern.)

2. Geben Sie in allen Fällen eine Fehlerabschätzung an (s. Satz 3.1 und Satz 3.4) und vergleichen Sie diese mit den exakten Integrationsfehlern

$$E_n = |I - I_n^{NC}| \quad \text{bzw.} \quad E_n = |I - G_n|.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Die Orthogonalpolynome $L_n(x)$ des Gaußschen Integrationsverfahrens für $[a, b] = [0, \infty]$ und $w(x) = e^{-x}$ heißen **Laguerre-Polynome.** Bestimmen Sie $L_o(x)$, $L_1(x)$ und $L_2(x)$ mit dem Verfahren von Schmidt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Stützpunkte x_i und die Gewichte A_i für die Gauß-Laguerrsche-Formel

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es seien

$$If = \int_a^b f(x)\, dx,$$

und $A_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$ die Gewichte und Stützstellen der Gaußschen Integrationsformel

$$I_n f = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

zum Intervall $[a, b]$ und der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Beweisen Sie folgende Richtung des Satzes von Stekloff und Polya: Falls

1. $I_n p \to Ip$ gleichmäßig für jedes Polynom auf $[a, b]$, und
2. eine Konstante K existiert derart, daß $\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

dann $I_n f \to If$ gleichmäßig für alle $f \in C[a, b]$.