Prof. Dr. C. W. Cryer 20. Januar 2000 WS 1999/00

PROBEKLAUSUR "Numerische Mathematik I"

Die Vorklausur umfaßt Fragen aus den Übungsblättern 1-11 und der Vorlesung bis einschließlich 3. Feb 2000.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 36 \\ 61 \end{pmatrix}$$

(a) die Lösung x von $Ax = b$ mit Spaltenpivotsuche.

(b) die LR-Zerlegung.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das zu $f(x) = x^5$ und den Interpolationsstellen $x = -1, 0, 1, 2$ gehörende Interpolationspolynom

(a) durch "naive" Vorgehensweise, d. h. durch Aufstellen eines geeigneten Gleichungssystems

(b) mit der Newton'schen Interpolationsformel.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß das Newtonverfahren für das Nullstellenproblem

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

für alle Startwerte $x_0 \geq 0$ gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

Aufgabe 4:

(a) Für welche Matrizen ist die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche durchführbar und warum ?

(b) Wie sind B-Splines definiert ?

(c) Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungssystem der Form

$$f(x) = 0 \text{ mit } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, .$$

Es sei f in einer Umgebung einer Nullstelle stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Konvergiert das Newton-Verfahren für einen beliebigen Startwert aus dieser Umgebung ?

(d) Wie ist die Konditionszahl einer nichtsingulären Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ definiert ?

(e) Was sind Maschinenzahlen ?

(f) Nennen Sie Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungen.

Aufgabe 5: Zeigen Sie: Die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine untere Dreiecksmatrix,

Aufgabe 6: Sei $x^{(k)}$ die Iterationsfolge, die durch Anwendung einer Iteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}, x^{(k-1)}; f)$ zur Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ entsteht. Es gelte: $x^{(k)} \to x^*$. Sei

$$\epsilon_k := x^{(k)} - x^* \ , \epsilon_k \neq 0 \tag{1}$$

und es gelte

$$\epsilon_{k+1} = C\epsilon_k\epsilon_{k-1}^2 \ , \quad C = \text{konstant} \tag{2}$$

- Zeigen Sie, daß die Ordnung dieser Methode gleich 2 ist.
- Zeigen Sie, daß es keine Funktion G gibt, so daß

  $\phi(u, v; f) = G(u, v, f(u), f(v))$.

Aufgabe 7: Die Rekursionsformel für B-Splines für den Fall $t_i = i \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ lautet

$$B_{i,k}(x) = \frac{1}{k-1}\{(x-i)B_{i,k-1}(x) + (i+k-x)B_{i+1,k-1}\}.$$

Beweisen Sie damit (oder anders) die Summationsformel

$$\sum_{j=i-k+1}^{i} B_{j,k}(x) = 1 \ \text{ für } \ i < x < i+1, \ k \geq 1.$$

Aufgabe 8: Auf einer Maschine mit Gleitkommaarithmetik (Basis t und Mantissenlänge d) sei $\mathcal{M}$ die Menge der Maschinenzahlen und $eps = \frac{1}{2}d^{-t+1}$. Für $x, y \in \mathcal{M}$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $|\delta| \leq eps$ und

$$rd(x * y) = (x * y)(1 + \delta).$$

Das Produkt $P_n = \prod_{i=1}^n x_i \neq 0$ von n Zahlen $x_i \in \mathcal{M}$ werde durch folgenden Algorithmus berechnet:

$$\begin{array}{l} P_0 = 1 \\ \text{for } i = 1 \text{ to } n : P_i = P_{i-1} * x_i. \end{array}$$

Es bezeichne $\overline{P}_n$ das tatsächlich berechnete Produkt.
Zeigen Sie, daß

$$\frac{\overline{P}_n}{P_n} \leq e^{n\cdot eps}.$$