Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 9, Abgabe 6.1.2000, 13.00

Aufgabe 35: (5 Punkte)
Seien $\tau_i \in \mathbb{R}/\{0\}$, für $i \leq i \leq n$. Beweisen Sie:

$$[\tau_1, \cdots, \tau_n]\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n} \tau_j}$$

(Hinweis: vollst. Induktion)

Aufgabe 36: (5 Punkte)
Der Numeriker Hacker hat die vierstellige PIN seiner EC-Karte vergessen. Mit Hilfe seines Computers möchte er nun die PIN aus den Daten BLZ, Kontonummer und Ablaufsdatum seiner Karte berechnen. Sein Programm liefert die Auswertung eines Polynoms. Die Werte von $p(6)$ und $p(7)$ ergeben die PIN. Am 31.12.1999 um 23.59 Uhr liefert das Programm noch folgende Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
p(x)	1	2	4	8	15	26		

Jetzt erst bemerkt Hacker, daß sein Computer nicht Jahr 2000 fähig ist. Berechnen Sie nun seine vierstellige PIN.

Aufgabe 37: (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Seien $x_0, \cdots, x_n$ paarweise unterschiedlich. Sei $p_n(x)$ das Polynom n-ten Grades, das die Daten $(x_i, f(x_i)), 0 \leq i \leq n$ interpoliert. Zeigen Sie,

$$f(x) - p_n(x) = \left[\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right][x_0, \cdots, x_n, x]f, x \in \mathbb{R}^n$$

Aufgabe 38: (2+1+2 Punkte)
Seien $t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 1/2,\ t_4 = 1,\ t_5 = 1,\ t = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ und $\tau_i = i/4,\ i = 1, 2, 3$.

1. Bestimmen Sie $B_{j,2,t}\ (x)$ für $j = 1, 2, 3$ und skizzieren Sie diese Funktionen.
2. Berechnen Sie,

   $$B_{j,2,t}\ (\tau_i) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3..$$

3. Eine gegebene Funktion g soll mit B-Splines interpoliert werden.
   Zeigen Sie, ohne die Schoenberg-Whitney-Bedingung zu benutzen, daß das Gleichungssystem

   $$\sum_{j=1}^{3} a_j B_{j,2,t}\ (\tau_i) = g(\tau_i),\ i = 1, 2, 3$$

   eine eindeutige Lösung besitzt.

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins Jahr 2000!