Prof. Dr. C. W. Cryer WS 96/97

Numerische Mathematik I

Übungsaufgabe 8, Abgabe 16.12.99, 13.00

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Sei $p \in \mathcal{P}_3$ das Polynom, das die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zwischen den Stützpunkten $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ interpoliert.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten von p mit Hilfe der Formel von Lagrange.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten von p mit der Newtonschen Interpolationsformel.

(c) Berechnen Sie den Wert $p(0,4)$ mit Hilfe der Rekursionsformel von Neville und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der durch die Formel von Lagrange geliefert wird.

Aufgabe 32: (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

(a) Das Programm "runge" befindet sich im Verzeichnis /u/stypa/Public/... Lesen Sie das Programm in Maple ein. Der Befehl hierzu lautet "read (runge);".

(b) Berechnen Sie das Beispiel von Runge (s. Skript Seite 156) für das Interpolationspolynom vom Grade 20

(i) für 21 äquidistante Stützstellen,

(ii) für die Nullstellen x_k des Tschebyscheff-Polynoms $T_{21}(x)$,
$x_k = \cos\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{21}$, $0 \le k \le 20$
als Stützstellen,

indem Sie das Programm "runge" entsprechend verändern.
Bemerkung: Das Programm speichert eine Postskript Datei plot.ps, die gedruckt werden kann.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathcal{P}_3$ mit:

$$\begin{array}{lcl} p(0) = 0 & , & p'(0) = 1 \\ p(1) = 3 & , & p'(1) = 6 \end{array}$$

2. Zeigen Sie, daß p eindeutig ist.

Aufgabe 34: (3 Punkte)

Sei $p \in \mathcal{P}_2$ das Polynom, das die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$ zwischen den Stützpunkten $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ interpoliert. Bestimmen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel von Lagrange. Benutzen Sie anschließend Satz 7.5 um im Punkt $\bar{x} = 0,5$ eine obere Schranke für den Fehler $f(\bar{x}) - p(\bar{x})$ zu berechnen und vergleiche diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.