Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 7, Abgabe 9.12.1999, 13.00

Aufgabe 27: (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Konditionszahlen κ_1, κ_2 und κ_∞ von A.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Zeigen Sie:
Für $A, B \in Mat(n,n)$ gilt:

$$||AB||_F \leq ||A||_F ||B||_F$$

Aufgabe 29: (2 Punkte)
Sei $\binom{x_1}{x_2}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 = 4 \\ 0.001x_1 &+ x_2 = 0.51 , \end{aligned}$$

die mit dem Gaußalgorithmus bei zweistelliger Gleitkommaarithmetik mit Basis zehn und mit Rundung berechnet werden soll.

a) Zeigen Sie:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0.001 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die berechnete Lösung $\hat{x}$.

c) Geben Sie eine Matrix E an mit

$$\begin{aligned} (A+E)\hat{x} &= b \\ |E| &\leq 0.00075(3|A| + 5|\hat{L}| \cdot |\hat{R}|) \end{aligned}$$

Aufgabe 30: (5 Punkte)
Der Wachstumsfaktor bei der Gaußelimination ist definiert als

$$\rho_n(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|} .$$

a) Berechnen Sie ρ_n für die Hadamardmatrizen

(1)

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b.w.

(2)

$$H_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) A sei eine $n \times n$ symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, daß $\rho_n(A) \leq 1$.