Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 6, Abgabe 2.12.1999, 13.00

Aufgabe 23: (1 + 4 Punkte)

a) Geben Sie für $x = (-3, 2, 7)^T$ $\|x\|_1, \|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$ an.

b) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ und $\|A\|_F$.

Aufgabe 24: (5 Punkte)
Zeigen Sie: Ist F eine $n \times n$-Matrix mit $||F|| < 1$, so existiert $(I + F)^{-1}$ und es gilt

$$||(I + F)^{-1}|| \leqq \frac{1}{1 - ||F||}.$$

Aufgabe 25: (5 Punkte)
Sei A eine nichtsinguläre $n \times n$-Matrix, $B = A(I + F), ||F|| < 1$ und x und Δx definiert durch $Ax = b$, $B(x + \Delta x) = b$. Dann gilt $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \leqq \dfrac{||F||}{1 - ||F||}$, sowie, falls $cond(A) \cdot ||B - A||/||A|| < 1$,

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leqq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{||B-A||}{||A||}} \frac{||B - A||}{||A||}.$$

Aufgabe 26: (5 Punkte)
Sei H_n die $n \times n$ Hilbert Matrix $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Sei $B_n = (b_{ij}^{(n)}) = H_n^{-1}$.

a) Überprüfen Sie die Formel

$$b_{ij}^{(n)} = \frac{(-1)^{i+j}(n + i - 1)!(n + j - 1)!}{(i + j - 1)[(i - 1)!(j - 1)!]^2(n - i)!(n - j)!}$$

für $n \leq 3$.

b) Bestimmen Sie $b_{11}^{(n)}$ und $b_{nn}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Benutzen Sie die Formel von Stirling, um eine asymptotische Darstellung für $b_{nn}^{(n)}$ zu bekommen.

d) Zeigen Sie, daß die Matrizenelemente von B_n ganzzahlig sind.
Hinweis: Binomialkoeffizienten sind ganzzahlig.