Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 5, Abgabe 25.11.1999, 13.00

Aufgabe 19: (5 Punkte)
Verwenden Sie den folgenden Algorithmus (mit einfacher Genauigkeit, d.h. float)

$$\begin{array}{l} \text{sum} = 1.0; \quad k = 0; \quad p = 1.0; \\ \text{do}\{ \\ \quad k = k + 1; \\ \quad p = p * x/k \\ \quad \text{sumold} = \text{sum}; \\ \quad \text{sum} = \text{sum} + p; \\ \quad \}\text{while}\{\text{sumold} \neq \text{sum}\}. \end{array}$$

zur Berechnung der Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Berechnen Sie die Summe für

$$x = +1, -1, +5, -5, +100, -100$$

und drücken Sie jeweils folgende Daten aus
exact = e^x, sum, Fehler = sum - exact, Relative Fehler = |Fehler/exact|.
Erklären Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 20: (10 Punkte) (Abgabe: 2.12.1999)

a) Im entsprechenden Verzeichnis /u/stypa/Public/... finden Sie ein Program "gauss1.c", welches das System

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 23 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

durch Gaußelimination (ohne Pivotsuche) und Rückwärtseinsetzen löst. Durch Rundungsfehlereinfluß wird allerdings ein falsches Ergebnis geliefert. Wie groß sind die Fehler?

b) Benutzen Sie das Programm, um die Gleichungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 13 & 10 & 42 \\ 7 & 7 & 2 & 27 \\ 10 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

zu lösen. Wie groß sind die Fehler?

c) Erweitern Sie das Programm um Spaltenpivotsuche. Welche Ergebnisse werden dann geliefert?

Aufgabe 21: (5 Punkte)
Es seien $n, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ und $n \cdot \epsilon \leq 0.1$. Zeigen Sie, daß

$$(1 + \epsilon)^n \leq 1 + 1,06\; n \cdot \epsilon\,.$$

Hinweis: Entwickeln Sie $[(1+\epsilon)^n - 1]$ und schätzen Sie wie bei der Exponentialreihe ab (vgl. Forster I, §8, Satz 2).

(b.w.)

Aufgabe 22: (5 + 5 Punkte)
Sei $a = (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^1 \\ (x, y) & \longmapsto & x_1 - x_2 \sin y - y \end{array}$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Umgebung $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ von a, eine Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}$ von a_1 und eine Abbildung

$$\phi : U_1 \longrightarrow V_1$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \phi(a) & = & a_1 \\ F(x, \phi(x)) & = & 0 \quad \forall\, x \in U_1. \end{array}$$

b) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren der Lösung

$$z = z(d_1, d_2)$$

der Gleichung

$$d_1 - d_2 \sin z - z = 0$$

für $(d_1, d_2) = (a_1, 0)$.