Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 3, Abgabe 11.11.1999, 13.00

Aufgabe 11: (5 Punkte)
Sei $A \in Mat(n,n)$, $C \in Mat(p,n)$, $B \in Mat(n,m)$. A sei regulär. Betrachten Sie folgende Methode zur Berechnung von $CA^{-1}B$. Sei

$$Z := \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$$

Die Matrix Z wird auf die Gestalt

$$Z := \begin{pmatrix} U & F \\ O & Q \end{pmatrix}$$

gebracht, wobei U eine rechte Dreiecksmatrix ist, indem, wie bei Gaußscher Elimination, Vielfachkeiten der 1-er, 2-er, ..., n-ter Zeile von den folgenden Zeilen subtrahiert werden.

a) Zeigen Sie, daß
$$Q = -CA^{-1}B$$

b) Zeigen Sie, daß die Berechnungen so durchgeführt werden können, daß genau
$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}mn^2 + \frac{1}{2}pn^2 + mnp - \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}pn$$
Multiplikationen erforderlich sind.

Aufgabe 12: (5 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen exakt von Hand durchgeführt werden.

Aufgabe 13: (5 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0,33 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,33 \\ 0,33 & 0,20 & 0,25 \end{pmatrix} b := \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen bis auf zwei Stellen ungleich 0 gerundet werden. Bei der Ziffer 5 wird so gerundet, daß die letzte Ziffer gerade ist (rd(16,5)= 16; rd(17,5)= 18).

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die Cholesky-Zerlegung von Hand durch und lösen Sie das Gleichungssystem.