Numerische Mathematik

Übungsaufgabe 1, Abgabe 28.10.1999, 13.00

Aufgabe 1: (4 Punkte)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Die Berechnungen sollen exakt von Hand durchgeführt werden.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix.

Die quadratischen Blockmatrizen A_{11}, A_{22} seien regulär. Bestimmen Sie A^{-1}.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
In der Vorlesung ist $perm(A)$, die Permanente einer $n \times n$ Matrix A, definiert worden. Im Jahr 1926 äußerte van der Waerden die Vermutung, daß für stochastische $n \times n$ Matrizen gilt

$$perm(A) \geq \frac{n!}{n^n}.$$

Eine Matrix heißt stochastisch, wenn für ihre Einträge a_{ij} gilt:

$$(i)\ a_{ij} \geq 0 \qquad\qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Zeigen Sie, daß die Vermutung für $n = 2$ korrekt ist.
Bemerkung: Der Beweis für die Korrektheit der Vermutung im allgemeinen Fall wurde erst vor wenigen Jahren erbracht.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{pmatrix} = (b_{jk})$$

b.w.

Wählen Sie (nicht-triviale) Partitionierungen $A = (A_{ij}), 1 \le i \le u,\ 1 \le j \le v$

$$B = (B_{jk}), 1 \le j \le v, 1 \le k \le w$$

und berechnen Sie <u>ein</u> (Matrizen) Element von $C := AB = (C_{ik}),\ 1 \le i \le u,\ 1 \le k \le w$.

(i) Mit der Formel ($n = 4$),

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

(ii) Mit der Formel

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{v} A_{ij} B_{jk}$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Bier wird in n Brauereien gebraut und in n Gebiete vermarktet. Die $n \times n$ Matrix A stellt die Lieferungswege dar:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{falls Gebiet } j \text{ von Brauerei } i \text{ beliefert wird} \\ \phantom{a_{ij}} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein aufmerksamer Volkswirt merkt, daß jedes Gebiet von genau einer Brauerei Lieferungen erhält.

Zeigen Sie, daß A regulär ist.

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Eine ASM Matrix (Alternating Sign Matrix) ist eine $n \times n$ Matrix A wofür:

a) Jedes Element a_{ij} von A ist entweder $0, +1$ oder -1

b) In jeder Zeile und jeder Spalte von A gilt:

   a) Die Summe der Elemente ist gleich 1

   b) Das erste nichtnull Element ist $+1$

   c) Die nichtnull Elemente haben wechselnde Vorzeichen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist z.B. eine ASM Matrix.}$$

Die Vermutung, daß die Anzahl $n \times n$ ASM Matrizen durch

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

gegeben ist, wurde erst vor kurzem mit großem Aufwand bewiesen. (Notices of the American Mathematical Society, Vol. 46, No. 6, S. 637-646, 1999).

Überprüfen Sie diese Vermutung für $n = 1, 2, 3$.