Übungen zur Vorlesung NUMERISCHE MATHEMATIK I

Übungsblatt 10 , Abgabe: 13.01.2000 , 13.00 Uhr

Aufgabe 39: (3 Punkte)
Man zeige:

$$\frac{d}{dx}B_{i,k,t}(x) = (k-1)\left\{-\frac{B_{i+1,k-1,t}(x)}{(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{B_{i,k-1,t}(x)}{t_{i+k-1}-t_i}\right\}$$

Aufgabe 40: (3 Punkte)
Sei $t_i \leq x \leq t_{i+1}$; $r, s \in \mathbb{N}$, $r \leq i+1-k$, $s \geq i$, $k \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{j=r}^{j=s} \alpha_j B_{j,k,t}(x) \ .$$

Dann gilt:

$$\min(\alpha_{i+1-k}, \ldots, \alpha_i) \leq f(x) \leq \max(\alpha_{i+1-k}, \ldots, \alpha_i)$$

Aufgabe 41: (6 Punkte)
Folgende Daten sind gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ_i	0	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
$f(\tau_i)$	0	2.9	3.5	3.8	3.5	3.5	3.5	2.6	0

Sei s_Δ der natürliche kubische Spline, der diese Daten interpoliert:

$$\begin{aligned} s_\Delta(\tau_i) &= f(\tau_i)\ , \quad 1 \leq i \leq n = 9 \\ s''_\Delta(\tau_1) &= 0 \\ s''_\Delta(\tau_n) &= 0\ . \end{aligned}$$

Erstellen Sie die Gleichungen $As = b$ für den Vektor $s \in \mathbb{R}^n$,

$$s = (s''_\Delta(\tau_i))\ , \quad 1 \leq i \leq n\ .$$

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und $x_1, \ldots, x_n \in H$ seien linear unabhängig. Sei $V = \text{span}(x_1, \ldots, x_n)$ und $v \in V$.

1. Sei $f \in H$. Zeigen Sie: Für die beste Approximation v von f gilt:

$$f - v \ \perp \ V\ .$$

2. Sei $F(w) := \|w - f\|_2^2 \ \ \forall\, w \in H$ und v die beste Approximation von f.

   Zeigen Sie:

$$F(v) - F(w) = -(v - w, v - w) \ \ \forall w \in V \ .$$

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Die Funktion $f(x) = x^4$ soll auf dem Intervall $[0, 1]$ durch eine Gerade $\ell(x)$ approximiert werden. Bestimmen Sie $\ell(x)$, so daß der Fehler bzgl. der L_2-Norm minimal wird.