Übungen zur Vorbereitung auf die Klausur
NUMERISCHE MATHEMATIK I

Übungsblatt 14, Abgabe: **keine**

Aufgabe 1: Die Zeilen der Matrix A bilden ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie: $A^+ = A^*$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie sämtliche Ecken von

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x \geq 0\} \,.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Newtonsche Interpolationspolynom vom Grad 2 zu den Stützstellen und Stützwerten:

j	x_j	y_j
0	1	2
1	-1	2
2	2	1

Aufgabe 4: Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \,.$$

Zeigen Sie:

(a) A ist für $|a| < 1/2$ invertierbar.

(b) Das SOR-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergiert für $\omega \in (0,2)$, falls $|a| < 1/2$.

Aufgabe 5: Sei $a > 0$ und $f(x) = \frac{1}{x} - a$.

(a) Stellen Sie das Newton-Verfahren auf zur Lösung von $f(x) = 0$.

(b) Seien $x_0, x_1, \ldots$ die Iterierten des Newton-Verfahrens. Zeigen Sie: Ist $0 < ax_0 < 1$, so gilt $x_n < 1/a$ (Graphische Argumentation genügt).

(c) Für $0 < ax_0 < 1$ konvergiert das Newton-Verfahren gegen $1/a$.

Aufgabe 6: Sei $x_j = j$, $j = 0, 1, 2, 3$.

(a) Skizzieren Sie $B_{0,2}$ und $B_{1,2}$.

(b) Wie lautet die Rekursionsformel für B-Splines?

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) den Wert von $B_{0,3}\left(\frac{3}{2}\right)$.

Aufgabe 7: Sei $x_j = e^{\pi i j/2}$, $j = 0, \ldots, 3$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\hat{y}_k$ in

$$p(x) = \hat{y}_0 + \hat{y}_1 x + \hat{y}_2 x^2 + \hat{y}_3^1 x^3$$

so, daß $p(x_j) = j + 1$, $j = 0, \ldots, 3$.