

Übungen zur „Einführung in die Numerische Mathematik“

Übungsblatt 2 , Abgabe: 3.11.2006 , 8.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 26 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotsuche. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung.**Aufgabe 6:** (4 Punkte)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

wobei sich A durch Gaußelimination in $A = LR$ zerlegen läßt.

- Welche Form haben die Matrizen L und R aus?
- Leiten Sie die Anzahl der Rechenoperationen her, die das Eliminationsverfahren (ohne Pivotisierung) zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, benötigt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)Zur Invertierung der $(n \times n)$ -Matrix A kann man das lineare Gleichungssystem $Ax^i = e_i$, $x^i \in \mathbb{R}^n$, ($i = 1, \dots, n$) lösen und erhält $A^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$.

- Zeigen Sie, dass man dies in $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Rechenoperationen ausführen kann.
- Berechnen Sie mit diesem Verfahren die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Abgabe: 10.11.2007, 4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm **gausselim(A,b,n,index)** zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Beim Aufruf enthalte **gausselim(A,b,n,index)** die $(n \times n)$ -Matrix **A** und den n -Vektor **b**. Nach Ablauf ist in der Matrix **A** die LR -Zerlegung gespeichert und der n -Vektor **index** enthält die durchgeführten Zeilenpermutationen. In dem Vektor **b** ist die Lösung x von $Ax = b$ gespeichert.

(a) Testen Sie das Programm an den Daten von Aufgabe 5.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für } l = 6, \dots, 20.$$

mit und ohne Spaltenpivotsuche.

(c) Die $(n \times n)$ -Matrix $H_n = (h_{ik})$, $h_{ik} = \frac{1}{i+k-1}$, $i, k = 1, \dots, n$, heißt *Hilbert-Matrix*. Sei $b_n := H_n x_0$ mit $x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$. Lösen Sie das Gleichungssystem $H_n x = b_n$ für $n = 5, 10, 15, 20$ mit und ohne Spaltenpivotsuche.

Bitte geben Sie die Programmieraufgabe in ausgedruckter Form ab und senden Sie sie zusätzlich per e-mail an Ihren Übungsgruppenleiter.